PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 16 — 15. August 1931 — Redaktionsschluß für Nr. 18 am 1. September 1931. — 32. Jahrgang

INHALT:

Zusammenfassende Berichte:

G. Rumer, Der gegenwärtige Stand der Diracschen Theorie des Elektrons. S. 601.

Originalmitteilungen:

J. Priebsch, Zur Verteilung radioaktiver Stoffe in der freien Luft. S. 622.

J. Zahradníček, Messung der Aktivität der radioaktiven Substanzen mittels der Drehwaage. S. 630.

W. Seitz und G. Harig, Eine neue Erscheinung beim Durchgang eines Elektronenbündels durch Blenden. S. 635.

G. Dietsch und W. Fricke, Über den Quereffekt der Magnetostriktion. S. 640.

C. Wagner, Zur Theorie der Gleichrichterwirkung. S. 641.

W. Litvinoff, Bemerkung zur Arbeit von J. Zahradníček: „Zwei akustische Vorlesungsversuche". Physik. Zeitschr. **32**, 56—59, 1931. S. 645.

E. Hiedemann, Bemerkung zu meiner Arbeit „Das Ausdehnungs-Hydrometer". S. 645.

Besprechungen:

W. Wien und F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik. Bd. 10. S. 646.

Gmelins Handbuch der Anorganischen Chemie. 59: Eisen. Teil A. S. 646.

Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften. Bd. 228. S. 647.

J. Cabannes, Anisotropie des molecules; Effet Raman. XI. S. 647.

W. Volkmann, Die elektrische Schulausrüstung S. 647.

G. Kowalewski, Integralgleichungen. S. 648.

Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden. Abt. III. Teil A, Heft 10. S. 648.

Gmelins Handbuch der Anorganischen Chemie, 59: Eisen, Teil B. S. 648.

K. Doehlemann, Geometrische Transformationen. S. 648.

Personalien. S. 648.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Der gegenwärtige Stand der Diracschen Theorie des Elektrons.

Von G. Rumer.

Der relativistischen Erweiterung der Quantenmechanik standen ernste Schwierigkeiten im Wege. Die Matrizenmechanik hat von Anfang an auf die relativistische Symmetrie in Raum und Zeit verzichtet, indem sie die Koordinaten durch Matrizen ersetzte, die Zeit aber als unabhängigen Parameter bestehen ließ. In der wellenmechanischen Fassung der Theorie gelang es leicht, eine lorentzinvariante Wellengleichung aufzustellen, die aber zu falschen Resultaten führte[1]).

Anfang 1928 gelang es Dirac, eine relativistische Quantenmechanik aufzustellen, wobei das von der Erfahrung geforderte magnetische Drehelektron (Spinelektron) sich ohne zusätzliche Hypothesen über die Struktur des Elektrons aus den Prinzipien der neuen Theorie ableiten ließ.

Allerdings treten in der Diracschen relativistischen Mechanik Schwierigkeiten auf, die der Urheber selbst mit Nachdruck betont hat. Die Stellen, wo diese Schwierigkeiten ernst werden und die Theorie versagt, markieren die Grenze zwischen dem Erforschten und Unerforschten in der heutigen Quantenmechanik.

Sie werden sich erst dann beseitigen lassen, wenn ein tieferer Einblick in die Struktur der Elementarpartikel gewonnen sein wird.

1) Vgl. etwa H. Hönl und C. Eckart. Zusammenfassender Bericht. Physik. Zeitschr. **31**, 89, 145, 1930.

Kapitel I. Relativistische Quantenmechanik.

§ 1. Der Diracsche Energieoperator.

Der Übergang von der klassischen zu der Quantenmechanik geschieht üblicherweise dadurch, daß man in dem Energieausdruck für das betrachtete System die vorkommenden klassischen Größen durch die entsprechenden im allgemeinen nicht vertauschbaren Operatoren (q-Zahlen) ersetzt.

In der relativistischen Punktmechanik ist die Energie p_0 die zeitliche Komponente des kovarianten Vierimpulses $p_i = \mu u_i$ oder ausführlicher geschrieben

$$p_0 = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad p_1 = -\frac{\mu v_1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad p_2 = -\frac{\mu v_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p_3 = -\frac{\mu v_3}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}\ ;\quad \mu = \text{Ruhmasse}. \tag{1}$$

Aus seinen Komponenten läßt sich die Invariante

$$\sum_{i=0}^{i=3} u_i p_i = \mu c^2$$

bilden.

Schreiben wir sie in der Form

$$\frac{p_0}{c} = \frac{v_1}{c}p_1 + \frac{v_2}{c}p_2 + \frac{v_3}{c}p_3 + \sqrt{1-\beta^2}\,\mu c, \tag{2}$$

so haben wir für die Energie einen bilinearen Ausdruck in bezug auf die Geschwindigkeiten v_i

und die Impulse p_i erhalten. Wir können aber auch eine quadratische Beziehung zwischen Energie und Impuls ableiten, indem wir aus den beiden Gleichungen

$$\frac{p_0}{c} = \frac{\mu c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \mathfrak{p} = \frac{\mu \mathfrak{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eliminieren

$$\frac{p_0^2}{c^2} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2 c^2. \qquad (3)$$

Vollziehen wir den Übergang zur Quantenmechanik bei (3), so erhalten wir den Operator „Quadrat der Energie". Dieses Vorgehen widerspricht aber der üblichen Regel der Quantenmechanik, die verlangt, daß der Übergang zu Operatoren in dem Ausdruck für die Energie, nicht aber in dem Ausdruck für das Quadrat der Energie vollzogen wird. Schreiben wir den Ausdruck für die Energie selbst auf, und zwar als Funktion der Impulsvariablen, so wird aus (3)

$$\frac{p_0}{c} = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2 c^2}. \qquad (4)$$

Dieser Ausdruck besitzt aber nicht die von der Relativitätstheorie geforderte Symmetrie in allen p_i. Auch ist es im Bereiche der Operatoren im allgemeinen nicht möglich, Quadratwurzeln zu ziehen. Ein Ausweg aus dieser Schwierigkeit ergibt sich nach Dirac durch Betrachtung von (2), indem man den in der klassischen Theorie trivialen Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit aufgibt. Der Ausdruck (2) kann dann als eine bilineare Form in den zwei verschiedenen Variablenreihen angesehen werden. Vollziehen wir nun den Übergang zur Quantenmechanik, so erhalten wir eine Operatorengleichung:

$$\boxed{\frac{W}{c} = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 \mu c} \qquad (2q)$$

$(W = p_0)$.

Es korrespondieren dann:

klassische Größen — (c-Zahlen)	Quantengrößen — (q-Zahlen)
$W \equiv p_0$ — Energie	W — Energieoperator
$\mathfrak{p}$ — Impuls	$\mathfrak{p}$ — Impulsoperator
$\frac{v_1}{c}, \frac{v_2}{c}, \frac{v_3}{c}$ — Geschwindigkeiten	a_1, a_2, a_3 — Geschwindigkeitsoperatoren.
$\sqrt{1-\beta^2}$	a_4

Die hier eingeführten Operatoren erhalten natürlich erst ihren Sinn, wenn die Vertauschungsrelationen zwischen ihnen bekannt sind.

§ 2. Die Geschwindigkeitsoperatoren. Lit. (7) (8) (9).

In der Operatorenrechnung entspricht nun die Iteration eines Operators dem Bilde n des Quadrates in der gewöhnlichen Algebra. Bilden wir also durch Iteration den Operator $\left(\frac{W}{c}\right)^2$, so erhalten wir

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 = \{(a\cdot\mathfrak{p}) + a_4\mu c\}\{(a\cdot\mathfrak{p}) + a_4\mu c\} = a_1^2 p_1^2 + a_2^2 p_2^2 + a_3^2 p_3^2 + a_4^2\mu^2 c^2 + \sum_{i,k}(a_i a_k + a_k a_i) p_i p_k.$$

Nehmen wir nun mit Dirac an, daß die Formel (3) auch in der Quantenmechanik bestehen bleibt, so müssen wir für die Geschwindigkeitsoperatoren folgende Eigenschaften fordern.

$$\boxed{\begin{aligned} &1.\ a_i p_k - p_k a_i = 0 \\ &2.\ a_i a_k + a_k a_i = 2\,\delta_{ik}. \end{aligned}} \qquad (5)$$

Für die Operatoren p_i und x_i bleiben auch bei Dirac die alten Vertauschungsrelationen bestehen:

$$p_i x_k - x_k p_i = \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{ik}.$$

Bei dieser Wahl der a_i ist (2q) sowohl als Quadratwurzel von (3) und auch als quantenmechanisches Analogon der klassischen Gleichung (2) anzusehen. Aus (5) folgt, da $a_i^2 = 1$ ist, daß der Operator nur die Eigenwerte ± 1 haben kann. Die Operatoren $(-a_i)$ besitzen aber genau dieselben Eigenwerte und gehorchen denselben Vertauschungsrelationen (5). Es wäre daher richtiger für (2q) zu schreiben

$$\frac{W}{c} = \pm (a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 \mu c),$$

wodurch auch quantenmechanisch dem doppelten Vorzeichen in (4) Rechnung getragen wird.

Wir wollen nun zeigen, daß auch in der Quantenmechanik die klassische Definition der Geschwindigkeit bestehen bleibt, daß nämlich identisch:

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = c a_i$$

gilt. Dazu müssen wir uns an die quanten-

mechanische Differentiation erinnern:

$$\varkappa \frac{dQ}{dt} = WQ - QW, \quad \left(\varkappa = \frac{h}{2\pi}\right),$$

wo Q ein beliebiger Operator ist, der die Zeit nicht explizite enthält. Setzen wir für Q den Operator „Koordinate x_i" ein, so erhalten wir, da $p_i x_i - x_i p_i = \varkappa$ ist[1]),

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{\varkappa}[W, x_i] = \frac{1}{\varkappa} c a_i (p_i x_i - x_i p_i) = c a_i. \quad (6)$$

Führen wir neue Operatoren γ_i ein

$$\gamma_0 = a_4, \quad \gamma_1 = i a_0 a_4, \quad \gamma_2 = i a_0 a_2, \quad \gamma_3 = i a_0 a_3,$$

so genügen die γ_i denselben Forderungen, die wir an die a_i gestellt haben:

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\,\delta_{ik}.$$

Da aus $a_i^2 = 1$, $a_4 = a_4^{-1}$ folgt, so sehen wir, daß der Operator a_4 sowohl die klassische Größe $\sqrt{1-\beta^2}$ als auch $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ repräsentiert. Die Operatoren γ_i können deswegen nach (1) als die quantenmechanischen Operatoren der Vierergeschwindigkeit bezeichnet werden. Es könnte scheinen, daß es vom Standpunkt der Relativitätstheorie natürlicher wäre, die γ_i zu benutzen. Jedoch haben die Vierergeschwindigkeiten in der Quantenmechanik keinen unmittelbaren Sinn. Schon der Begriff der Eigenzeit kann in der Quantenmechanik nicht ohne weiteres übernommen werden, denn sie ist klassisch als Bogenlänge der Weltlinie eines Massenpunktes definiert, wozu es in der Quantenmechanik kein Analogon gibt, da der Bahnbegriff in ihr verloren geht. Ebensowenig kann man auch eine quantenmechanische Differentiation nach der Eigenzeit einführen.

§ 3. Die kräftefreie Bewegung. Lit. (9).

Nach der klassischen relativistischen Theorie bewegt sich ein Massenpunkt beim Fehlen eines äußeren Feldes gleichmäßig und geradlinig. Wir wollen nun untersuchen, wie sich ein Massenpunkt nach der Diracschen Theorie bewegt.

Die Operatoren $c a_i$ sind nur der Werte $\pm c$ fähig und wir erhalten einstweilen nach (6) das paradoxe Resultat, daß ein Massenpunkt sich nur mit Lichtgeschwindigkeit zu bewegen vermag, was anscheinend allen unseren Erfahrungen widerspricht. Das Paradoxon löst sich aber sofort, wenn wir bemerken, daß die Geschwindigkeitsoperatoren a_i keineswegs konstant sind, und daß also in der Diracschen Theorie ein Massenpunkt auch im kräftefreien Raum sich nicht geradlinig bewegt. Die Ableitung der a_i nach der Zeit ist keineswegs gleich Null wie in der klassischen Theorie, sondern hat den Wert

$$\varkappa \frac{da_i}{dt} = [W, a_i] = 2(Wa_i - c p_i) \neq 0. \quad (7)$$

Wohl ist aber der Impuls p_i mit der Energie W vertauschbar und also zeitlich konstant. Hieraus geht schon hervor, wie verschieden die Geschwindigkeits- und Impulsoperatoren sind. Die Gleichung (7) läßt sich integrieren. Zu diesem Zweck führen wir den Operator

$$\eta_i = c a_i - c^2 W^{-1} p_i \quad (8)$$

ein. Dann kommt

$$\varkappa \frac{d\eta_i}{dt} = [W, \eta_i] = 2 W \eta_i.$$

Integriert:

$$\eta_i = \eta_i^0 e^{-\frac{2Wt}{\varkappa}} = e^{\frac{2Wt}{\varkappa}} \eta_i^0, \quad (9)$$

wo η_i^0 die Gestalt des Operators η_i für $t = 0$ ist. Führt man in (8) nach (9) wieder $c a_i = \frac{dx_i}{dt}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{dx_i}{dt} = c W^{-1} p_i + \eta_i^0 e^{-\frac{2Wt}{\varkappa}}.$$

Integriert

$$\boxed{x_i = \underbrace{a_i + c^2 W^{-1} p_i t}_{\text{I}} - \underbrace{\frac{\varkappa}{2} \eta_i^0 W^{-1} e^{-\frac{2Wt}{\varkappa}}}_{\text{II}}}, \quad (10)$$

wo (a_i) ein Operator ist, der die Rolle der Integrationskonstante übernimmt.

Die Gleichung (10) zeigt, daß die kräftefreie Bewegung sich aus zwei Anteilen zusammensetzt:

Der erste Anteil wächst linear mit der Zeit, und zwar mit derjenigen konstanten Geschwindigkeit, die dem Impuls p_i entspricht. Denn beim Übergang zur klassischen Mechanik wird ja

$$c^2 W^{-1} p_i \to c^2 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\mu c^2} \cdot \frac{\mu v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = v_i.$$

Außerdem ist $c^2 W^{-1} p_i$ mit der Energie vertauschbar, also zeitlich konstant.

Der zweite Anteil, der sich der geradlinigen Bewegung überlagert, hat offenbar einen periodischen Charakter ($\varkappa = \frac{h}{2\pi i}$ ist rein imaginär). Ihre Frequenz ist $2W \cdot \frac{2\pi}{h}$, und ihre Amplitude $\frac{\varkappa}{2} \eta_i^0 W^{-1}$. Sie läßt sich folgendermaßen abschätzen. η_i ist von der „Größen-

[1]) $[A, B]$ bedeutet hier $AB - BA$.

ordnung“:

$$c - c^2\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\mu c^2}\cdot\frac{\mu v}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq c - v \qquad (11)$$

W^{-1} von der „Größenordnung“ $\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\mu c^2}$. Die Amplitude ist also für $v \ll c$ von der Größenordnung

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{\mu c} \sim 10^{-11}\,\text{cm},$$

d. h. von der Dimension der Comptonwellenlänge. Für Geschwindigkeiten, die mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind, folgt nach (11) daß $\eta_i \to 0$ geht. Durch diese Betrachtungen zeigt es sich also, wie sich der Geschwindigkeitsbegriff von dem Impulsbegriff ablöst. Die klassische Geschwindigkeit entspricht dem ersten Anteil in (10), ist aber keineswegs mit der Gesamtgeschwindigkeit identisch.

Die Bedeutung dieser Betrachtung ist mehr symbolischer als anschaulicher Natur, denn es handelt sich hier um Beziehungen zwischen Operatoren und nicht zwischen meßbaren Größen. Es kann wohl keine Rede davon sein, daß man die Bewegung eines Punktes durch einen Meßapparat in seine translatorischen und periodischen Anteile zerlegen kann. Welche Größen in der Diracschen Theorie meßbar sind, ist wohl noch nicht hinreichend geklärt.

§ 4. Drehimpuls und Spin.

Bevor wir die Sätze über den Drehimpuls aufstellen, wollen wir unsere Betrachtungen auf eine Bewegung in einem äußeren kugelsymmetrischen Felde ausdehnen. Zu der kinetischen Energie $c a_1 p_1 + c a_2 p_2 + c a_3 p_3 + a_4 \mu c^2$ kommt noch eine potentielle Energie $V(r)$ hinzu, und der Energieoperator lautet:

$$W = c a_1 p_1 + c a_2 p_2 + c a_3 p_3 + a_4 \mu c^2 + V(r).$$

Diesen Operator werden wir in diesem § benutzen.

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik treten an Stelle der klassischen Drehimpulse die entsprechenden Operatoren $L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$, ... $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, die mit dem nichtrelativistischen Energieoperator $H = \frac{1}{2\mu}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(r)$ vertauschbar und also zeitlich konstant sind. Wir wollen nun sehen, welche Modifikationen an diesen Begriffen vorzunehmen sind. Die Vertauschungsrelationen für die L_i lauten[1] $\left(\text{in Einheiten von } \frac{h}{2\pi}\right)$

$$\begin{aligned}&[p_1, L_3] = p_2 \quad [p_2, L_3] = -p_1 \quad [p_3, L_3] = 0\\ &[L_2, L_1] = L_3 \quad [L_1, L_3] = L_2 \quad [L_3, L_2] = L_1.\end{aligned} \qquad (12)$$

1) Vgl. etwa: M. Born u. P. Jordan, Elementare Quantenmechanik § 25.

Außerdem ist bekanntlich

$$[L_i, V(r)] = 0.$$

Der Operator L_i ist in der Diracschen Theorie nicht mehr eine Konstante der Bewegung, denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{L}_3}{dt} &= [W, L_3] =\\ &= c a_1 [p_1, L_3] + c a_2 [p_2, L_3] + c a_3 [p_3, L_3] =\\ &= c (a_1 p_2 - a_2 p_1) \neq 0\end{aligned} \qquad (13)$$

oder:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = c\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{p}).$$

Es entsteht die Frage, welcher Operator jetzt konstant wird und sich daher zur Definition des Drehimpuls um die x_3-Achse eignet.

Um sie zu beantworten, führen wir einen neuen dreikomponentigen Operator σ ein, den wir als Spinoperator bezeichnen.

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{h}{2\pi} i a_3 a_2, \quad \sigma_2 = \frac{h}{2\pi} i a_1 a_3, \quad \sigma_3 = \frac{h}{2\pi} i a_2 a_1} \qquad (14)$$

Wir beweisen leicht folgende Vertauschungsrelationen $\left(\text{in Einheiten von } \frac{h}{2\pi}\right)$

$$\begin{aligned}&[a_1, \tfrac{1}{2}\sigma_3] = a_2, [a_2, \tfrac{1}{2}\sigma_3] = -a_1, [a_3, \tfrac{1}{2}\sigma_3] = 0\\ &[\tfrac{1}{2}\sigma_2, \tfrac{1}{2}\sigma_1] = \tfrac{1}{2}\sigma_3, \quad [\tfrac{1}{2}\sigma_1, \tfrac{1}{2}\sigma_3] = \tfrac{1}{2}\sigma_2,\\ &[\tfrac{1}{2}\sigma_3, \tfrac{1}{2}\sigma_2] = \tfrac{1}{2}\sigma_1\\ &\sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\,\delta_{ik}.\end{aligned} \qquad (15)$$

Durch Vergleich (12) und (15) sehen wir, daß a_i und $\frac{1}{2}\sigma_i$ denselben Vertauschungsrelationen genügen wie die p_i und L_i. Der Spinoperator ist ebenfalls keineswegs eine Konstante der Bewegung, denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d\sigma_3}{dt} &= \left[W, \frac{1}{2}\sigma_3\right] =\\ &= c p_1 \left[a_1, \frac{1}{2}\sigma_3\right] + c p_2 \left[a_2, \frac{1}{2}\sigma_3\right] + c p_3 \left[a_3, \frac{1}{2}\sigma_3\right] =\\ &= c\,(p_1 a_2 - p_2 a_1) \neq 0\end{aligned} \qquad (16)$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{d\sigma}{dt} = c\,(\mathfrak{p} \times \mathfrak{a}).$$

Aus (13) und (16) folgt aber, daß der Operator

$$\boxed{\mathfrak{M} = \mathfrak{L} + \frac{1}{2}\sigma} \qquad (17)$$

zeitlich konstant ist. Führen wir ihn an Stelle des Operators $\mathfrak{L}$ ein und bemerken, daß σ_i nur der Werte $\pm\frac{h}{2\pi}$ fähig ist, so läßt er sich offensicht-

lich dahin deuten, daß das Elektron einen Drall von der Größe $\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$ besitzt, der zu dem Bahndrehimpuls hinzu addiert werden muß, um eine Konstante der Bewegung zu erhalten.

Der Operator $\mathfrak{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ muß auch entsprechend abgeändert werden, und zwar ist:

$$\mathfrak{M}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \left(L_i + \frac{1}{2} \sigma_i \right)^2$$

eine Konstante der Bewegung. Die Ausrechnung ergibt

$$\boxed{\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{L}^2 + (L_1 \sigma_1 + L_2 \sigma_2 + L_3 \sigma_3) + \frac{3}{4}}. \quad (18)$$

Die $\mathfrak{M}^2$ und M_i genügen ersichtlich denselben Vertauschungsrelationen wie die $\mathfrak{L}^2$ und L_i. Demzufolge ist genau so wie früher $\mathfrak{M}^2$ und eine Komponente von M_i (z. B. M_3) gleichzeitig meßbar, und die Folgerungen über ihre Eigenwerte lassen sich genau so wie in der nichtrelativistischen Mechanik ziehen. Das bekannte Ergebnis ist[1]):

Sei r der größte der endlich vielen möglichen Werte des Operators L_i, dann sind diese durch die Zahlenreihe

$$m = -r, -r+1, \ldots\ldots r-1, r$$

gegeben, wo r eine Zahl aus den Reihen

$$r = 0, 1, 2, \ldots\ldots \quad (19)$$

oder

$$r = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \ldots\ldots \quad (20)$$

ist. Entsprechend folgt für die Werte des Operators $\mathfrak{L}^2$

$$r(r+1),$$

wo r wieder eine Zahl aus der Reihe (19) oder (20) ist. Die Schrödingersche Theorie führt für ein System mit einem Elektron zu ganzzahligen Werten von r, (Quantenzahl l!), die Diracsche Theorie dagegen zu halbzahligen Werten, (Quantenzahl j!) wie aus $M = m \pm \frac{1}{2}$ folgt. Dementsprechend besitzt $\mathfrak{M}^2$ die Eigenwerte

$$j(j+1)$$

mit halbzahligen Werten von j. Jeder Term muß sich im Magnetfelde in $2r+1$ Terme aufspalten, entsprechend den möglichen Werten von r. Erfahrungsgemäß haben in Übereinstimmung hiermit die Atome mit $\frac{\text{gerader}}{\text{ungerader}}$ Anzahl von Elektronen eine $\frac{\text{ungerade}}{\text{gerade}}$ Anzahl von magnetischen Termkomponenten, also $\frac{\text{ganzzahlige}}{\text{halbzahlige}}$ m und r. Wir haben damit durch die Erfahrung prüfbare Folgerungen aus der Diracschen Theorie gezogen.

Die Quantenzahlen haben in der Wellenmechanik die Bedeutung der Indizes der entsprechenden Eigenfunktionen. Es ist daher bequem, auch in die Diracsche Theorie eine ganzzahlige Quantenzahl einzuführen, die uns später beim Keplerproblem nützlich sein wird. Wir führen deswegen einen neuen Operator K ein, den wir durch

$$\boxed{K^2 = \mathfrak{M}^2 + \frac{1}{4}} \quad (21)$$

definieren. Seine Eigenwerte, die gleich

$$\pm \sqrt{j(j+1) + \tfrac{1}{4}} = \pm (j + \tfrac{1}{2})$$

sind, haben ganzzahlige Werte, und zwar

$$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots$$

wobei, da $j \geq \frac{1}{2}$ ist, der Wert $k = 0$ nicht vorkommt. Diese Quantenzahl stimmt im positiven Bereich mit der alten Quantenzahl k in der Sommerfeldschen Theorie überein, die hier in naturgemäßer Weise wieder auftritt, aber dazu noch mit einem Vorzeichen behaftet. Die Berechnung von K wird erleichtert, wenn wir vorher eine allgemeine Formel ableiten.

Es seien A und B zwei vertauschbare Vektoren, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ der Spinvektor, dann ist

$$(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = \sum_i \sigma_i^2 A_i B_i + \sum_{i,k} (\sigma_i \sigma_k A_i B_k + \sigma_k \sigma_i B_k A_i) = (A \cdot B) + i(\sigma, A \times B).$$

Nun berechnen wir

$$\{(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1\}^2 = (\mathfrak{L} \cdot \sigma)(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 2(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1$$
$$= \mathfrak{L}^2 + i(\sigma \cdot \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}) + 2(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1 =$$
$$\mathfrak{L}^2 - (\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 2(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1 = \mathfrak{L}^2 + (\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1,$$

woraus

$$\mathfrak{M}^2 + \tfrac{1}{4} = \{(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1\}^2$$

folgt.

Der Operator $\{(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1\}$ genügt also der Definitionsgleichung für K ist aber nicht konstant, wie eine leichte Ausrechnung zeigt.

Setzen wir aber

$$\boxed{K = a_4 \{(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1\}} \quad (22)$$

so ist, da $a_4^2 = 1$ ist, auch

$$K^2 = \{(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1\}^2 = \mathfrak{M}^2 + \tfrac{1}{4},$$

und diese Größe ist, wie man sich überzeugen kann, konstant.

[1]) Vgl. etwa: Born-Jordan l. c. § 27, S. 142.

§ 5. Darstellung der Geschwindigkeits- und Spinoperatoren durch Matrizen.

Jede Reihe von unvertauschbaren Operatoren (q—Zahlen) kann durch eine Reihe ihnen zugeordneter hermitischer Matrizen, welche denselben Vertauschungsrelationen gehorchen, dargestellt werden. Für die Geschwindigkeits- und Spinoperatoren haben wir die Vertauschungsrelationen gefunden:

$$\sigma_i\sigma_k + \sigma_k\sigma_i = 2\,\delta_{ik} \quad \text{für die drei Spinoperatoren,}$$
$$a_i a_k + a_k a_i = 2\,\delta_{ik} \quad \text{für die vier Geschwindigkeitsoperatoren.} \quad (23)$$

Haben wir nun ein Matrizensystem, welches den Formeln (23) genügt, so genügen die Matrizen

$$U^{-1}\sigma_i U,\ U^{-1}a_i U \quad (U\text{—Unitäre Matrix})$$

offenbar denselben Vertauschungsrelationen. Die Darstellung ist also nur bis auf eine unitäre Transformation bestimmt. Wir wollen zuerst die Spinmatrizen bestimmen. Da σ_i nur die Eigenwerte ± 1 besitzt, versuchen wir es mit zweireihigen Matrizen. Wir wählen etwa für σ_3 die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es möge nun σ_1 durch die allgemeine hermitische Matrix

$$\begin{pmatrix} \varrho_1, \varrho_2 e^{i\varphi} \\ \varrho_2 e^{-i\varphi}, \varrho_3 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Die Gleichung $\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 0$ liefert

$$\varrho_1 = \varrho_3 = 0.$$

Aus $\sigma_1^2 = 1$ folgt $\varrho_2^2 = 1$, d. h. $\varrho_2 = \pm 1$, so daß σ_1 durch eine Matrix von der Form

$$\begin{pmatrix} 0, e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi}, 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann. Durch dieselbe Überlegung folgt, daß σ_2 die Form

$$\begin{pmatrix} 0, e^{i\psi} \\ e^{-i\psi}, 0 \end{pmatrix}$$

hat. Aus $\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 0$ folgt

$$|\varphi - \psi| = \frac{\pi}{2}.$$

Wählen wir nun $\varphi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir als eine mögliche Darstellung für den Spinoperator

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ein Matrizensystem, das schon Pauli aufgestellt hatte.

Wenden wir uns der Darstellung der Geschwindigkeitsoperatoren a_i zu, so sehen wir, daß wir nicht mit zweireihigen Operatoren auskommen. Denn sei etwa

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

so müssen nach dem oben Gesagten die drei anderen die Form

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}\ a_3 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi} \\ e^{-i\psi} & 0 \end{pmatrix}\ a_4 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

haben, wobei

$$|\varphi - \psi| = \frac{\pi}{2} \qquad |\varphi - \theta| = \frac{\pi}{2} \qquad |\psi - \theta| = \frac{\pi}{2}$$

für $\varphi \neq \psi \neq \theta$

bestehen muß, was offenbar unmöglich ist. Wir können aber unmittelbar ein Matrizensystem angeben, das unseren Forderungen (23) genügt, nämlich:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$a_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

oder in leicht verständlicher Schreibweise, welche ihren Zusammenhang mit den Paulischen Matrizen zum Ausdruck bringt.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ s_1 & 0 \end{bmatrix}\ a_2 = \begin{bmatrix} 0 & s_2 \\ s_2 & 0 \end{bmatrix}\ a_3 = \begin{bmatrix} 0 & s_3 \\ s_3 & 0 \end{bmatrix}\ a_4 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix},$$

wo ε die zweireihige Einheitsmatrix ist. Wir werden später sehen, daß aus der für die relativistische Quantenmechanik grundlegenden Theorie der binären Darstellungen der Lorentzgruppe derartige Matrizen entspringen.

Wir müssen nun auch der Diracschen Theorie angepaßte Darstellung der Spinoperatoren aufstellen. Aus der Definitionsgleichung (14) erhalten wir:

$$\sigma_1 = i a_3 a_2 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & s_3 \end{bmatrix}$$

Die Diracschen Spinmatrizen sind also das direkte Produkt der entsprechenden Paulischen Matrizen.

$$\sigma_1 = s_1 \times s_1; \qquad \sigma_2 = s_2 \times s_2; \qquad \sigma_3 = s_3 \times s_3.$$

Sie haben doppelt soviel Eigenwerte wie von der Erfahrung gefordert wird. Jeder der beiden Werte des Spins $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ und $-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ ist noch zweifach entartet. Das ist eine sehr tiefgehende und noch keineswegs verstandene Folgerung aus der Diracschen Theorie.

§ 6. Die Wellenfunktionen.

Nun wollen wir die abstrakte Operatorenmechanik verlassen und zur wellenmechanischen Fassung der Quantenmechanik übergehen. Wie wir in § 1 gesehen haben, ist der Diracsche Energieoperator eine Bilinearform in zwei wesentlich verschiedenen Reihen von Operatoren, den Impulsoperatoren und den Geschwindigkeitsoperatoren. In der Matrizendarstellung sind die ersteren durch unendliche Matrizen repräsentiert, die letzteren durch vierreihige. Dementsprechend müssen wir auch beim Übergang zur Wellenmechanik in der Diracschen Wellenfunktion zwei Reihen von Variablen annehmen. Die Impulsoperatoren wirken, genau wie bei Schrödinger, auf die Koordinaten x, y, z, t. Die neuen Geschwindigkeits- und Spinoperatoren, die bei Dirac hinzugekommen sind, wirken auf eine neue Variable (die wir Spinvariable nennen wollen, wohl zu unterscheiden vom Spinoperator). Die Wellenfunktion $\psi(x, y, z, t/\zeta)$ hängt von beiden Arten von Variablen ab. Wir müssen uns nun an die statistische Deutung der Wellenfunktion erinnern. In der nicht relativistischen Wellenmechanik bedeutet

$$\psi^*(x, y, z)\,\psi(x, y, z)$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Elektron an der Stelle x, y, z zu finden.

Fragen wir anderseits nach der Wahrscheinlichkeit, ein Elektron in einem Punkt x, y, z und zwar mit einer ganz bestimmten Richtung des Spins ζ_1 anzutreffen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür gegeben durch

$$W = \psi^*(x, y, z \mid \zeta_1)\,\psi(x, y, z \mid \zeta_1),$$

wo nun ψ auch von der Spinvariablen abhängt. Stellen wir uns auf den Standpunkt von Pauli, wonach die Spinvariable nur zweier Werte fähig ist, so wird die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron an der Stelle x, y, z anzutreffen ohne Rücksicht auf die Richtung des Spins, gegeben durch

$$W = \psi^*(x, y, z \mid \zeta_1)\,\psi(x, y, z \mid \zeta_1) + \psi^*(x, y, z \mid \zeta_2)\,\psi(x, y, z \mid \zeta_2).$$

($\zeta = \zeta_1$ bedeutet, der Spin ist nach rechts gerichtet, $\zeta = \zeta_2$ nach links.)

Nun hat aber der Spin bei Dirac nicht zwei Werte, sondern doppelt soviel: zweimal $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ und zweimal $-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$. Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron an der Stelle x, y, z anzutreffen, lautet daher

$$W = \sum_{\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4} \psi^*(x, y, z \mid \zeta)\,\psi(x, y, z \mid \zeta).$$

Es ist bequem, die Spinvariable als Index der ψ-Funktion zu schreiben

$$\psi(x, y, z, t \mid \zeta_i) \equiv \psi_i(x, y, z, t).$$

So kommen wir anstelle der einen ψ-Funktion bei Schrödinger und der zwei ψ-Funktionen bei Pauli zu den vier ψ-Funktionen bei Dirac.

Die Impulsoperatoren wirken auf die Koordinaten in der ψ-Funktion, die Geschwindigkeits- und Spinoperatoren auf die Indizes. Es ist aber zu empfehlen, den Spinindex der Wellenfunktion sich immer als eine fünfte Variable vorzustellen, die allerdings nur vier Werte annehmen kann. Man findet die Differential-(Wellen)gleichung für die ψ-Funktion, indem man in dem Energieausdruck die Energie und Impulse durch die Operatoren

$$W = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\hat{c}}{\hat{c}t} \qquad p_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\hat{c}}{\hat{c}x_k} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

ersetzt und diesen Operator auf die ψ-Funktion wirken läßt. Also

$$\left\{a_0\frac{h}{2\pi i}\frac{\hat{c}}{c\,\hat{c}t} + a_1\frac{h}{2\pi i}\frac{\hat{c}}{\hat{c}x} + a_2\frac{h}{2\pi i}\frac{\hat{c}}{\hat{c}y} + a_3\frac{h}{2\pi i}\frac{\hat{c}}{\hat{c}z} + a_4\,\mu c\right\}\psi(x, y, z, t \mid \zeta) = 0,$$

wo a_0 die vierreihige Einheitsmatrix ist.

Benutzen wir jetzt für die a_i ihre Darstellungen und schreiben die Spinvariable als Index, so erhalten wir die Diracschen Gleichungen in der Form

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{h}{2\pi i\,c\,\hat{c}t} + \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{h}{2\pi i}\frac{\hat{c}}{\hat{c}x} + \begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}\frac{h}{2\pi i}\frac{\hat{c}}{\hat{c}y} + \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\frac{h}{2\pi i}\frac{\hat{c}}{\hat{c}z} + \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\mu c\right\}\begin{matrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{matrix}$$

Beim Rechnen mit r-reihigen Matrizen ist immer eine Gleichung zwischen Matrizen äquivalent einem System von r-linearen Gleichungen. Hier erhalten wir also ein System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung für die vier Komponenten der Wellenfunktion

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_1}{c\,\partial t}+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_4}{\partial x}-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \psi_4}{\partial y}+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_3}{\partial z}+\mu c\,\psi_1=0$$

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_2}{c\,\partial t}+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_3}{\partial x}+\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \psi_3}{\partial y}-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_4}{\partial z}+\mu c\,\psi_2=0$$

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_3}{c\,\partial t}+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_2}{\partial x}-\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \psi_2}{\partial y}+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_1}{\partial z}-\mu c\,\psi_3=0$$

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_4}{c\,\partial t}+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}+\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \psi_1}{\partial y}-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_2}{\partial z}-\mu c\,\psi_4=0.$$

Wir werden später sehen, daß man sie in einer Form schreiben kann, in der die relativistische Invarianz direkt ersichtlich ist. Die vierkomponentige ψ-Funktion bildet keineswegs einen vierdimensionalen komplexen Vektor, wie man anzunehmen geneigt sein könnte. In der Wellenoptik ist es üblich geworden, der Darstellung der Maxwellschen Theorie eine Darstellung der Tensoranalysis vorauszuschicken, da in der ihr angepaßten Schreibweise die Maxwellschen Gleichungen in einer besonders durchsichtigen Form erscheinen. So müssen wir auch, um ein tieferes Verständnis der Diracschen Theorie der Materiewellen zu gewinnen, eine ihnen angepaßte Schreibweise finden. Dies werden wir im dritten Kapitel tun.

§ 7. Bewegung im äußeren elektromagnetischen Felde.

Wir wollen nun die Diracsche Gleichung auf den Fall des Vorhandenseins eines äußeren elektromagnetischen Feldes auszudehnen suchen. In der klassischen relativistischen Mechanik wird die Bewegung eines Partikels mit der Ladung $-e$ in einem äußeren Felde dadurch beschrieben, daß in den Bewegungsgleichungen p_i: ersetzt wird durch den „verallgemeinerten" Vierer-impuls:

$$P_i = p_i + eA_i,$$

wo A_i das Viererpotential ist, aus dem sich die Feldstärken nach der Formel

$$F_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$$

berechnen.

Es lautet nach dieser Regel der Energieausdruck bei Vorhandensein eines äußeren Feldes

$$\frac{1}{c^2}P_0^2 = P_1^2+P_2^2+P_3^2+\mu^2c^2. \qquad (*)$$

Diese Regel wird unverändert in die Quantenmechanik übernommen. So haben Klein und Gordon vermutet, daß die richtige Wellengleichung dadurch entsteht, daß in (*) die Operatoren

$$P_k \quad \text{durch} \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^k}+eA_k$$

ersetzt werden, was bekanntlich zu falschen Resultaten führte. Dirac wendet diese Regel auf seine kräftefreie Gleichung und erhält damit die Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{c}P_0=a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3+a_4mc}, \qquad (25)$$

welche sich nun an der Erfahrung bewährt hat.

Im Gegensatz zu den p_k sind P_k nicht mehr miteinander vertauschbare Operatoren. Bildet man z. B. die Differenz der Ausdrücke $P_kP_i\psi$ und $P_iP_k\psi$, so erhält man:

$$\left\{\varkappa^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^k\partial x^i}-\varkappa e\frac{\partial}{\partial x_k}(A_i\psi)-\varkappa eA_k\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+e^2A_kA_i\psi\right\}-$$

$$-\left\{\varkappa^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^k\partial x^i}-\varkappa e\frac{\partial}{\partial x^i}(A_k\psi)-\varkappa eA_i\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+e^2A_iA_k\psi\right\}=\frac{he}{2\pi i}F_{ki}\cdot\psi,$$

oder ausführlicher

$$\begin{aligned}[P_0P_1]&=\varkappa e\mathfrak{E}_1 & [P_2P_3]&=\varkappa e\mathfrak{H}_1\\ [P_0P_2]&=\varkappa e\mathfrak{E}_2 & [P_3P_1]&=\varkappa e\mathfrak{H}_2\\ [P_0P_3]&=\varkappa e\mathfrak{E}_3 & [P_1P_2]&=\varkappa e\mathfrak{H}_3.\end{aligned} \qquad (26)$$

§ 8. Magnetische Eigenschaft des Spin.

Wir wollen nun sehen, welche Abweichungen die Diracsche Theorie gegenüber der Klein-Gordonschen mit sich bringt. Hierzu berechnen wir den Operator $\frac{P_0^2}{c^2}$ bei Dirac, um ihn mit dem Klein-Gordonschen Ausdruck

$$\frac{P_0^2}{c^2}=P^2+P^2+P^2+\mu^2c^2$$

vergleichen zu können.

Setzen wir $a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3+a_4\mu c=D$, so lautet (25): $\frac{P_0}{c}\psi=D\psi$; daraus folgt durch

linke Multiplikation mit $\frac{P_0}{c}$.

$$\frac{P_0^2}{c^2}\psi = \frac{P_0 D}{c}\psi = \frac{D P_0}{c}\psi + \frac{1}{c}[P_0, D]\psi = = D^2\psi + \frac{1}{c}[P_0, D]\psi .$$

Nun ist

$$D^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \mu^2 c^2 + a_1 a_2 [P_1 P_2] + a_3 a_1 [P_3 P_1] + a_2 a_3 [P_2 P_3]$$

$$\frac{1}{c}[P_0, D] = \frac{a_1}{c}[P_0 P_1] + \frac{a_2}{c}[P_0 P_2] + \frac{a_3}{c}[P_0, P_3]$$

oder nach (14) und (26)

$$\frac{P_0^2}{c^2} = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \mu^2 c^2 + \frac{h}{2\pi}\frac{e}{c}(\sigma, \mathfrak{H}) + i\frac{h}{2\pi}\frac{e}{c}(a, \mathfrak{E}).$$

Diese Folgerung der Diracschen Gleichung unterscheidet sich nun von der Klein-Gordonschen dadurch, daß sie zwei Glieder mehr enthält. Vernachlässigen wir die relativistische Korrektion, indem wir $P_0 = \mu c^2 + H + e A_0$ setzen und H als kleine Größe betrachten, so erhalten wir

$$H + e A_0 = \frac{1}{2m}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + \frac{1}{2\mu}\frac{h}{2\pi}\frac{e}{c}(\sigma \cdot \mathfrak{H}) + i\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{h}{2\pi}\frac{e}{c}(a \cdot \mathfrak{E}).$$

Wir können das Ergebnis dahin deuten, daß wir dem Elektron eine zusätzliche potentielle Energie vom Betrage

$$\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{h}{2\pi}\frac{e}{c}(\sigma \cdot \mathfrak{H}) + i\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{e}{c}(a \cdot \mathfrak{E})$$

zuschreiben. Das erste Glied bedeutet eine magnetische Energie, herrührend von einem magnetischen Moment des Elektrons, das entsprechend den Werten $\sigma = \pm 1$ die Beträge

$$+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{e}{\mu c} \text{ oder } -\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{e}{\mu c}$$

annehmen kann.

Das zweite Glied gehört zur elektrischen Energie eines imaginären elektrischen Moments; dieses kann natürlich keinen physikalischen Sinn haben. Es tritt nur bei der etwas künstlichen Bildung von $\frac{P_0^2}{c^2}$ auf, die einzig den Zweck hat, einen Energieausdruck zu erhalten, den man bequem mit dem Klein-Gordonschen Ausdruck vergleichen kann.

§ 9. Negative Werte der Energie.

Wir kommen nun kurz auf die Schwierigkeiten der Diracschen Theorie zurück.

Jede relativistische Mechanik, die klassische, wie die Diracsche, welche von der Beziehung

$$\frac{W^2}{c^2} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2 c^2; \qquad \frac{W}{c} = \pm\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2 c^2} \qquad (*)$$

ausgeht, begegnet einer wesentlichen Schwierigkeit. Sie besteht darin, daß zu gegebenen Werten der Impulse p_i stets zwei Werte der Energie gehören, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Neben den positiven Werten der Energie, die den beobachtbaren Bewegungen des Elektrons entsprechen, treten noch entsprechende negative Werte der Energie, die offenbar keinen physikalischen Sinn haben.

In der klassischen Theorie ist diese Schwierigkeit nicht störend, da die p_i^2 nie negativ werden können, so daß nach (1) die Energie $\frac{W}{c}$ nie Null wird. Da klassisch nur kontinuierliche Übergänge vorkommen, bedeutet dies, daß die positiven und die negativen Werte völlig auseinander fallen und von dem einen die andern nie erreicht werden können.

In der Diracschen Theorie

$$\frac{W}{c} = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 \mu c \qquad (**)$$

tritt diese Schwierigkeit auch auf, da der Operator rechter Hand, wie schon betont wurde, das quantenmechanische Analogon der Quadratwurzel in (*) ist und deswegen die Zweideutigkeit im Vorzeichen besitzt.

Da, erstens, in der Quantenmechanik diskontinuierliche Übergänge vorkommen, und, zweitens Elektronen in Gebiete eindrängen können, wo die Impulse klassisch gesprochen, imaginäre Werte haben, wird diese Schwierigkeit sehr ernst.

Betrachten wir in der relativistischen Quantenmechanik das Eigenwertproblem

$$(W - E)\psi = 0,$$

so haben wir außer den Eigenfunktionen, die zu $E_n > 0$ gehören,

$$\psi_1^+, \psi_2^+ \cdots \psi_n^+, \cdots$$

noch Eigenfunktionen, die zu $E_n < 0$ gehören,

$$\psi_1^-, \psi_2^-, \psi_3^- \cdots \psi_n^- \cdots$$

Selbstverständlich darf man die „negativen" Eigenfunktionen nicht ignorieren, wenn es gilt, einen beliebigen Zustand nach Eigenfunktionen von W zu entwickeln. Denn ohne diese „negativen" Eigenfunktionen ist das Funktionensystem nicht vollständig.

Am krassesten äußert sie sich bei der Betrachtung der Reflexion der Elektronen am Potentialberg. Dabei kann unter Umständen ein Übergang zu den Werten der negativen Energie stattfinden und die Wahrscheinlichkeit solcher Übergänge verschwindet nicht.

Versuche, diese Schwierigkeit zu beseitigen, haben Dirac und Schrödinger unternommen. Einstweilen ist nicht zu erkennen, inwieweit diese Versuche der Erfahrung entsprechen. Sie sollen deswegen hier nicht besprochen werden.

Den Bereich abzutasten, in dem die Diracsche Theorie gilt, liegt nicht im Rahmen dieses Berichtes. Darüber wird bald eine eingehende Untersuchung von Bohr erscheinen.

Wie die klassische Mechanik versagt in Gebieten, wo die Geschwindigkeit vergleichbar wird mit der Lichtgeschwindigkeit oder die Wirkungsgröße sich bemerkbar macht, so versagt auch die Diracsche Theorie in dem Gebiete, wo es sich um die Konstitution der Elementarpartikel-Elektronen und -Kerne handelt.

Kapitel II. Kepler-Problem. Lit. 10, 11.

Nach den allgemeinen Sätzen lautet die Gleichung für das Wasserstoffproblem in der Diracschen Theorie:

$$\frac{1}{c}\left(W+e\cdot\frac{e}{r}\right)\psi=(a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3+a_4\mu c)\psi. \tag{1d}$$

Unter Benutzung der Paulischen Matrizen spalten wir (1d) in zwei zweikomponentige Gleichungen

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{c}\left(W+\frac{e^2}{r}\right)-\mu c\right\}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\\ &=\left\{s_1p_1+s_2p_2+s_3p_3\right\}\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}.\\ &\left\{\frac{1}{c}\left(W+\frac{e^2}{r}\right)+\mu c\right\}\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}=\\ &=\left\{s_1p_1+s_2p_2+s_3p_3\right\}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{I_1d}$$

Zur Bestimmung der Energiewerte hat man harmonisch schwingenden Wellen mit dem gemeinsamen zeitabhängigen Faktor $e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}$ anzusetzen. Interessiert man sich für Bewegungen „langsam" gegen Lichtgeschwindigkeit, d. h. W nahe gleich der Ruheenergie μc^2, so ist von den Faktoren

$$\left(\frac{W}{c}-\mu c\right) \text{ und } \left(\frac{W}{c}+\mu c\right)$$

der zweite ungeheuer groß ist im Vergleich zum ersten. Deswegen müssen die Funktionen ψ_3, ψ_4 ihrer absoluten Größe nach sehr klein gegenüber ψ_1 und ψ_2 sein und können in erster Näherung gestrichen, also als relativistische Korrektion aufgefaßt werden. Wir wollen die Gleichung (I_1d) in engster Analogie mit der Schrödinger-Gleichung

$$\left(H+\frac{e^2}{r}\right)\psi=\frac{1}{2\mu}\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2\right)\psi \tag{1s}$$

behandeln nach einer Methode, die der klassischen Lösung durch Separation der Variablen korrespondiert.

§ 1. Transformation auf Polarkoordinaten.

Nichtrelativistisch. An Stelle der klassischen Definition des Radialimpulses

$$p_r=p_1\frac{x_1}{r}+p_2\frac{x_2}{r}+p_3\frac{x_3}{r}$$

tritt in der Quantenmechanik der symmetrische Mittelwert

$$\begin{aligned}p_r&=\frac{1}{2}\left\{\left(\mathfrak{p}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)+\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{p}\right)\right\}\\ &=\frac{\mathfrak{r}}{r}\mathfrak{p}-\frac{i}{r}\cdot\frac{h}{2\pi}=\mathfrak{p}\frac{\mathfrak{r}}{r}+\frac{i}{r}\frac{h}{2\pi}.\end{aligned} \tag{1}$$

Es folgt[1])

$$\mathfrak{Q}^2=(\mathfrak{r}\times\mathfrak{p})(\mathfrak{r}\times\mathfrak{p})=r^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)-r^2p_r^2$$

woraus

$$H+\frac{e^2}{r}=\frac{1}{2\mu}\left(p_r^2+\frac{\mathfrak{Q}^2}{r^2}\right). \tag{IIs}$$

Damit ist das Keplerproblem auf einen einzigen Freiheitsgrad reduziert. Die Eigenwerte des Operators $\mathfrak{Q}^2$ sind die Zahlen

$$\frac{h^2}{4\pi^2}l(l+1) \qquad l=0,\ 1,\ 2\ \ldots\ldots$$

Daher hat man:

$$\boxed{H+\frac{e^2}{r}=\frac{1}{2\mu}\left(p_r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{l(l+1)}{r^2}\right)}. \tag{II_1s}$$

Relativistisch.

Wir führen einen neuen Operator

$$\omega=a_1\frac{x_1}{r}+a_2\frac{x_2}{r}+a_3\frac{x_3}{r}=\left(a\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)$$

ein, der nur von den Polarwinkeln, aber nicht mehr von r abhängt. Es ist nun

$$\omega^2=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{r^2}=1;\ \omega a_4+a_4\omega=0.$$

Die Eigenwerte von ω sind also ± 1; da ω ferner mit a_4 schiefvertauschbar ist, muß ω bei geeig-

[1]) Vgl. etwa: Born-Jordan l. c. § 33.

neter Wahl des Koordinatensystems auf dieselbe Form gebracht werden können wie die Matrizen α_i.

Weiter folgt: $\omega\left(a, \frac{\mathfrak{r}}{r}\right) = 1$

$$(a, \mathfrak{p}) = \omega\left(a, \frac{\mathfrak{r}}{r}\right)(a, \mathfrak{p}) =$$

$$\omega\left(\frac{\mathfrak{r}}{r} \cdot \mathfrak{p}\right) +$$

$$+ \frac{\omega}{r}(a_1 a_2 L_3 + a_2 a_3 L_1 + a_3 a_1 L_2) =$$

$$\omega\left(\frac{\mathfrak{r}}{r} \cdot \mathfrak{p}\right) +$$

$$+ \frac{\omega}{r} i (\sigma \cdot \mathfrak{L}) =$$

$$\omega\left(p_r + \frac{i\{(\sigma \cdot \mathfrak{L}) + 1\}}{r}\right)$$

woraus

$$\frac{1}{c}\left(W + \frac{e^2}{r}\right) = \omega\left(p_r + \frac{iK\alpha_4}{r}\right) + \alpha_4 \mu c. \quad \text{(IId)}$$

Die Eigenwerte des Operators K sind die Zahlen

$$\frac{h}{2\pi} k \qquad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Das Problem reduziert sich also auf:

$$\boxed{\frac{W_0}{c} + \frac{e^2}{cr} = \omega\left(p_r + \frac{ihk\alpha_4}{2\pi r}\right) + \alpha_4 \mu c}. \quad \text{(II}_1\text{d)}$$

§ 2. Differentialgleichung für die radiale Abhängigkeit.

Wir gehen zur Wellenmechanik über

$$p_r = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial r}; \qquad p_r^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial r^2}.$$

Um reelle Gleichungen zu erhalten, müssen wir, da $\left(p_r + \frac{ik\alpha_4}{r}\right)$ imaginär ist, die Komponenten von ω geeignet wählen. Würden zur Darstellung von ω und α_4 zweireihige Matrizen genügen, so würde der Ansatz

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

geeignet sein. Da wir aber vier ψ-Funktionen haben, müssen wir diese Matrizen zur vierreihigen erweitern.

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die vier Gleichungen werden dann in zwei identisch gleiche Systeme zerfallen: I für ψ_1 und ψ_3 und II für ψ_2 und ψ_4. Nach diesen Vorbereitungen schreiben wir die Gleichungen auf:

Nichtrelativistisch

$$\left(H + \frac{e^2}{r}\right)\psi = \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\psi}{\partial r^2} + \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\psi. \quad \text{(IIIs)}$$

Relativistisch

$$\text{I}\begin{cases}\left(\frac{W}{c} + \frac{e^2}{cr} - \mu c\right)\psi_1 = -\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \psi_3}{\partial r} - \frac{h}{2\pi}\frac{k}{r}\psi_3 \\ \left(\frac{W}{c} + \frac{e^2}{cr} + \mu c\right)\psi_3 = \frac{h}{2\pi}\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{h}{2\pi}\frac{k}{r}\psi_1\end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases}\left(\frac{W}{c} + \frac{e^2}{cr} - \mu c\right)\psi_2 = -\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\psi_4 - \frac{h}{2\pi}\frac{k}{r}\psi_4 \\ \left(\frac{W}{c} + \frac{e^2}{cr} + \mu c\right)\psi_4 = \frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\psi_2 - \frac{h}{2\pi}\frac{k}{r}\psi_2.\end{cases} \quad \text{(IIId)}$$

§ 3. Bestimmung der Energieniveaus für das Wasserstoffatom.

Nichtrelativistisch. Durch den Ansatz

$$r\psi = e^{-\frac{r}{a'}} R(r) \quad \text{(IVs)}$$

gehen wir zu der Unbekannten $R(r)$ über. Wir erhalten

$$\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{2}{a'}\frac{dR}{dr} + \left\{\frac{8\pi^2\mu e^2}{h^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R = -\left(\frac{1}{a'^2} + \frac{8\pi^2\mu H}{h^2}\right)R. \quad \text{(Vs)}$$

Über a' sei so verfügt, daß der Koeffizient auf der rechten Seite verschwindet.

$$\frac{1}{a'^2} + \frac{8\pi^2\mu H}{h^2} = 0; \qquad a' = \frac{h}{2\pi\sqrt{-2\mu H}}. \quad \text{(VIs)}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle $H<0$ und $H>0$

$$\boxed{H<0,\ a' \text{ reell.}}$$

Wir suchen für $R(r)$ Lösungen in der Form

$$R(r)=\sum_s b_s r^s \qquad \text{(VIIs)}$$

($s=s_0,\ s_0+1\ldots\ldots$, wo s_0 keine ganze Zahl zu sein braucht). Man erhält die Rekursionsformel

$$\{s(s-1)-l(l+1)\}\,b_s = \\ =2b_{s-1}\left\{\frac{s-1}{a'}-\frac{4\pi^2e^2\mu}{h^2}\right\}. \qquad \text{(VIIIs)}$$

Der Anfangsexponent s_0 wird dadurch bestimmt, daß die Klammer auf der linken Seite verschwindet.

$$s_0(s_0-1)=l(l+1);\quad s_0=l+1,\ s_0=-l. \qquad \text{(IXs)}$$

Der negative Wert $s_0=-l$ führt zu keiner Eigenlösung[1]). Brechen wir die Reihe mit dem Gliede $b_s=b_{s_0+n_r}$ ab, so erhalten wir aus (VIIIs) wenn wir $s-1$ durch s ersetzen

$$\frac{s}{a'}=\frac{4\pi^2e^2\mu}{h^2}.$$

Das liefert

$$\frac{1}{a'}=\frac{4\pi^2e^2\mu}{h^2}\,\frac{1}{s_0+n_r}$$

oder nach (VIs) und (IXs)

$$\boxed{-H=\frac{2\pi^2\mu e^4}{h^2}\,\frac{1}{(l+1+n_r)^2}}$$

($n=(l+1+n_r)$ — Hauptquantenzahl)
(n_r — Radiale Quantenzahl)

die Bohrschen Energieniveaus des Wasserstoffatoms.

Durch die Rekursionsformel sind die Polynome bis auf einen Normierungsfaktor bestimmt. Mit Einführung der Bezeichnung

$$I(\alpha,\beta,x)=1+\frac{\alpha}{1!}\frac{x}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\,\beta(\beta+1)}x^2+\cdots\cdots$$

lassen sich diese Polynome in der Form:

$$\boxed{r^{l+1}I\left(-n_r,\,2l+2,\,2\frac{r}{a'}\right)=r^{l+1}L^{(2l+1)}_{n_r+1}\left(2\frac{r}{a'}\right)}$$

(wo $L_{n_r+1}(x)$ die Laguerreschen Polynome sind) schreiben. Die zu (n_r, l) gehörigen radialen Eigenfunktionen, sind also:

$$e^{-\frac{r}{a'}}R(r),\ \text{wo}\ R(r)=r^{l+1}I\left(-n_r,\,2l+2,\,2\frac{r}{a'}\right)$$

$$\boxed{H>0,\ a' \text{ imaginär}}.$$

Da a' imaginär ist, braucht die Reihe (VIIs) nicht abzubrechen und jede konvergente Reihe gibt eine Eigenlösung. Wir bestimmen den Bruch $\frac{b_s}{b_{s-1}}$ für große s. Aus (VIIIs) folgt, für große s

$$s^2b_s=\frac{2}{a'}\,s\,b_{s-1}$$

oder

$$\frac{b_s}{b_{s-1}}=\frac{2}{sa'} \qquad \text{(XIIs)}$$

Somit konvergiert die Reihe wie $e^{\frac{2r}{a'}}$, woraus wir schließen, daß alle Werte von $H>0$ mögliche Eigenlösungen sind.

Relativistisch. Die Gleichungen

$$\left(\frac{W}{c}+\frac{e^2}{cr}-\mu c\right)\psi_1=-\frac{h}{2\pi}\frac{d\psi_3}{dr}-\frac{h}{2\pi}\frac{k}{r}\psi_3 \\ \left(\frac{W}{c}+\frac{e^2}{cr}+\mu c\right)\psi_3=\frac{h}{2\pi}\frac{d\psi_1}{dr}-\frac{h}{2\pi}\frac{k}{r}\psi_1 \qquad \text{(IIId)}$$

lösen wir durch den Ansatz:

$$\psi_1=e^{-\frac{r}{a}}F(r),\quad \psi_3=e^{-\frac{r}{a}}G(r). \qquad \text{(IVd)}$$

Setzen wir

$$\frac{1}{A}=\frac{2\pi}{h}\left(\mu c-\frac{W}{c}\right);\quad \frac{1}{B}=\frac{2\pi}{h}\left(\mu c+\frac{W}{c}\right) \qquad (2)$$

$$a=\frac{2\pi}{h}\cdot\frac{e^2}{c}\cong\frac{1}{137}\ \text{(Feinstrukturkonstante)},$$

so erhalten wir aus (IIId) nach Umgruppierung der Glieder

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)G+\frac{a}{r}F=\frac{1}{A}F+\frac{1}{a}G \\ \left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)F-\frac{a}{r}G=\frac{1}{a}F+\frac{1}{B}G. \qquad \text{(Vd)}$$

Über a sei so verfügt, daß die Determinante von F, G auf der rechten Seite verschwindet

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{A}, & \frac{1}{a}\\ \frac{1}{a}, & \frac{1}{B}\end{vmatrix}=0;\quad a=\sqrt{AB}=\frac{h}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\mu^2c^2-\frac{W^2}{c^2}}}. \qquad \text{(VId)}$$

1) D. h. zu einer solchen, die im Unendlichen endlich bleibt. Ebenso läßt sich beweisen, daß auch der Exponent $s_0=l+1$ zu keiner Eigenlösung führt, wenn die Reihe nicht abbricht. Man hat also nur Polynome als mögliche Lösungen.

Wir unterscheiden zwei Fälle $W < \mu c^2$ und $W > \mu c^2$

$$\boxed{W < \mu c^2,\ a \text{ reell}}.$$

Wir suchen für F und G Lösungen in der Form

$$F(r) = \sum_s c_s r^s;\quad G(r) = \sum_s c'_s r^s \qquad \text{(VII d)}$$

($s = s_0,\ s_0 + 1,\ s_0 + 2 \ldots\ldots$, wo s_0 keine ganze Zahl zu sein braucht).

Man erhält die Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} (s+k)\,c'_s + a c_s &= \frac{c_{s-1}}{A} + \frac{c'_{s-1}}{a} \\ -a c'_s + (s-k)\,c_s &= \frac{c_{s-1}}{a} + \frac{c'_{s-1}}{B} \end{aligned} \qquad \text{(VIII d)}$$

Der Anfangsexponent s_0 wird dadurch bestimmt, daß die Determinante auf der linken Seite verschwindet.

$$\begin{vmatrix} s_0 + k, & a \\ -a, & s_0 - k \end{vmatrix} = 0, \quad s_0 = \pm\sqrt{k^2 - a^2}. \qquad \text{(IX d)}$$

Der negative Wert $s_0 = -\sqrt{k^2 - a^2}$ führt zu keiner Eigenlösung[1]).

Brechen wir die Reihen (VII d) mit den Gliedern $c_s = c_{s_0+n_r}$ und $c'_s = c'_{s_0+n_r}$ ab, so erhalten wir aus (VIII d), wenn wir $s+1$ durch s ersetzen

$$\begin{aligned} \frac{c_s}{A} + \frac{c'_s}{a} &= 0 \\ \frac{c_s}{a} + \frac{c'_s}{B} &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Multiplizieren wir in (VIII d) die erste Gleichung mit $\frac{1}{a}$, die zweite mit $-\frac{1}{A}$, so erhalten wir beim Addieren wegen (VI d)

$$\left(\frac{a}{a} - \frac{(s-k)}{A}\right) c_s + \left(\frac{(s+k)}{a} + \frac{a}{A}\right) c'_s = 0. \qquad (\bar{3})$$

Die Auflösungsbedingung für (3) und ($\bar{3}$) lautet

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{A} + \frac{(s+k)}{a}, & \frac{a}{a} - \frac{(s-k)}{A} \\ \frac{1}{B}, & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\frac{1}{a^2}(s+k) + \frac{1}{AB}(s-k) + \frac{a}{Aa} - \frac{a}{Ba} = 0,$$

was sich wegen (2) zu

$$\frac{s}{a} = a\frac{2\pi}{h}\frac{W}{c}$$

vereinfacht. Quadrieren wir beide Seiten, so erhalten wir

$$s^2\left(\mu^2 c^2 - \frac{W^2}{c^2}\right) = a^2\frac{W^2}{c^2}$$

oder

$$\boxed{\frac{W}{\mu c^2} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{(s_0 + n_r)^2}} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{(n_r + \sqrt{k^2 - a^2})^2}}} \qquad \text{(X d)}$$

die Sommerfeldsche Formel für die Energieniveaus. Setzen wir $W = \mu c^2 - H$ und entwickeln die Wurzel, so erhalten wir die angenäherte Formel

$$-H = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^2}\,\frac{1}{(n_r + \sqrt{k^2 - a^2})^2} \qquad (X_1 d)$$

($n = n_r + \sqrt{k^2 - a^2}$ = Hauptquantenzahl)

(n_r ist positiv, k positiv und negativ).

Unsere Rechnung versagt, wenn die beiden Koeffizienten der Gleichung (3) einzeln Null sind.

$$\begin{aligned} \frac{a}{a} - \frac{s-k}{A} &= 0 \\ \frac{a}{A} + \frac{s+k}{a} &= 0 \end{aligned}$$

woraus

$$s^2 - k^2 = -a^2 \quad \text{oder} \quad s = \sqrt{k^2 - a^2} = s_0$$

folgt. Dieser Fall entspricht $n_r = 0$,

$$n = \sqrt{k^2 - a^2} \sim |k|,$$

also dem Grundzustand. Wir werden gleich sehen, daß in diesem Fall nur positive Werte für k zulässig sind.

Durch die Rekursionsformel sind die Polynome bis auf einen Normierungsfaktor bestimmt. Eine einfache, aber langwierige Rechnung ergibt die geschlossenen Ausdrücke

$$\begin{aligned} F(r) &= r^{s_0}\left\{N_1 I\left(-n_r,\ 2s_0+1,\ 2\frac{r}{a}\right) + N_3 I\left(-(n_r-1),\ 2s_0+1,\ 2\frac{r}{a}\right)\right\} \\ G(r) &= r^{s_0}\left\{N_2 I\left(-n_r,\ 2s_0+1,\ 2\frac{r}{a}\right) + N_4 I\left(-(n_r-1),\ 2s_0+1,\ 2\frac{r}{a}\right)\right\}. \end{aligned} \qquad \text{(XI d)}$$

wo

$$I(\alpha, \beta, x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}\frac{x}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\,\beta(\beta+1)}x^2 + \cdots$$

und N_i vier Konstanten sind, die nur von (n_r, k) abhängen.

Wir wollen sie für $n_r = 0$ (Grundzustand) berechnen. Da $I(\alpha, \beta, x)$ für $\alpha = 1$ eine unend-

[1]) Vgl. die Fußnote im nichtrelativistischen Fall S. 612 l.

liche Reihe wird, folgt

$$N_3 = N_4 = 0.$$

Gehen wir mit

$$F(r) = N_1 r^{s_0}; \quad G(r) = N_2 r^{s_0}$$

in Gl. (V d), so erhalten wir

$$a N_1 + (s_0 + k) N_2 = 0 \qquad \frac{N_1}{a} + \frac{N_2}{B} = 0$$

$$(s_0 - k) N_1 - a N_2 = 0 \qquad \frac{N_1}{A} + \frac{N_2}{a} = 0$$

zwei Systeme von homogenen Gleichungen mit der Determinanten Null.

Es folgt aus dem ersten System

$$\begin{aligned} N_1 &= (s_0 + k) N \\ N_2 &= -a N. \end{aligned} \tag{4}$$

Einsetzen in das zweite System ergibt:

$$\frac{s_0 + k}{a} - \frac{a}{B} = 0$$

$$-\frac{s_0 + k}{A} + \frac{a}{a} = 0$$

oder

$$\frac{a}{s_0 + k} = \frac{a}{A} = \frac{2\pi}{h} a \left(\mu c - \frac{W}{c}\right).$$

Da $W < \mu c^2$ muß auch die linke Seite positiv sein, was wegen $|k| > s_0$ nur für positive Werte von k möglich ist.

$$\boxed{W > \mu c^2, \ a \text{ imaginär}}$$

Da a imaginär ist, brauchen die Reihen nicht abzubrechen und jede konvergente Reihe gibt eine Eigenlösung.

Wir bestimmen den Bruch $\frac{c_s}{c_{s-1}}$ für große s.

Aus (VIII d) folgt näherungsweise

$$s c'_s = \frac{c_{s-1}}{A} + \frac{c'_{s-1}}{a}$$

$$\frac{c'_s}{a} = \frac{s}{A}.$$

Folglich ist

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} = \frac{c'_s}{c'_{s-1}} = \frac{2}{as}. \tag{XII d}$$

Somit konvergieren die Reihen wie $e^{\frac{2r}{a}}$, woraus wir schließen, daß alle Werte von $W > \mu c^2$ möglich sind.

§ 4. Winkelabhängigkeit der Eigenfunktionen.

Bei der nichtrelativistischen Theorie erscheinen die Eigenfunktionen als Produkte

$$\psi = \varrho(r)\, Q(\varphi, \vartheta) \tag{XIII s}$$

der radialen Funktion $\varrho(r)$ und einer Funktion die nur von den Winkeln abhängt. Da die Operatoren L_3 und $\mathfrak{L}^2$ Integrale der Bewegung sind, folgt:

$$\begin{aligned} L_3 Q(\varphi_1 \vartheta) &= m Q(\varphi, \vartheta) \\ \mathfrak{L}^2 Q(\varphi_1 \vartheta) &= l(l+1)\, Q(\varphi, \vartheta), \end{aligned} \tag{XIV s}$$

wo in Polarkoordinaten[1]):

$$L_3 = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} L_1 + i L_2 &= e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\ L_1 - i L_2 &= e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \vartheta} i + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\ \mathfrak{L}^2 &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} \right| \end{aligned} \tag{5}$$

$$\left(\text{In Einheiten von } \frac{h}{2\pi}\right).$$

Aus (XIV s) ergibt sich, daß

$$Q(\varphi, \vartheta) = Y_l^m(\vartheta, \varphi) = e^{i m \varphi} P_l^m(\cos \vartheta)$$

Kugelfunktion der l^{ten} Ordnung ist.

Ein analoges Verfahren werden wir auch in der Diracschen Theorie einschlagen und für die vier ψ-Funktionen den Ansatz

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{-\frac{r}{a}} F(r) \cdot S_1(\vartheta, \varphi) \\ \psi_2 &= e^{-\frac{r}{a}} F(r)\, S_2(\vartheta, \varphi) \\ \psi_3 &= e^{-\frac{r}{a}} G(r)\, T_1(\vartheta, \varphi) \\ \psi_4 &= e^{-\frac{r}{a}} G(r)\, T_2(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \tag{XIII d}$$

machen. Wir benutzen die beiden Drehimpulssätze

$$\begin{aligned} M_3 \psi &= (L_3 + \tfrac{1}{2}\sigma_3)\, \psi = (m \pm \tfrac{1}{2})\, \psi \\ K \psi &= a_4 \{(\mathfrak{L} \cdot \sigma) + 1\} \psi = k \psi, \end{aligned} \tag{XIV d}$$

wo das $+$ Zeichen zu dem Paar ψ_1, ψ_3, das $-$ Zeichen zu dem Paar ψ_2, ψ_4 gehört.

Aus (5) und (XIV d) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} S_1 &= \left(m_1 + \frac{1}{2}\right) S_1 \\ \frac{1}{i} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} S_2 &= \left(m_2 - \frac{1}{2}\right) S_2 \end{aligned} \tag{6}$$

und dieselben Gleichungen für T_1 und T_2. Beide Zahlen $(m_1 + \frac{1}{2})$ und $(m_2 - \frac{1}{2})$ müssen den gemeinsamen Wert $m + \frac{1}{2}$ besitzen, der für den ganzen Zustand, nicht für die einzelne Zustands-

1) Vgl. etwa: H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik § 11.

funktion ψ_i charakteristisch ist. Daraus folgt

$$m_1 = m;\ m_2 = m + 1.$$

Aus (6) schließen wir nun, daß die φ-Abhängigkeit für die Winkelfunktionen durch

$$S_1 = e^{im\varphi}\Theta_1(\vartheta) \qquad S_2 = e^{i(m+1)\varphi}\Theta_2(\vartheta)$$
$$T_1 = e^{im\varphi}\Phi_1(\vartheta) \qquad T_2 = e^{i(m+1)\varphi}\Phi_2(\vartheta)$$

gegeben ist, wo die Θ und Φ-Funktionen von ϑ allein sind. Wir schreiben den Drehimpulssatz (XIV d) ausführlich

$$\{(\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{s}) + 1\}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$
$$\{(\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{s}) + 1\}\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = -k\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

$\mathfrak{s} = (s_1, s_2, s_3)$ Paulische Matrizen

oder

$$\begin{pmatrix}1+L_3, & L_1 - iL_2\\ L_1 + iL_2, & 1 - L_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \pm k\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix};\quad a_4 = \begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & -\varepsilon\end{pmatrix} \tag{8}$$

wobei für ψ_3, ψ_4 an Stelle von ψ_1, ψ_2 das untere Zeichen für k zu nehmen ist. Setzen wir für die L_i ihre Ausdrücke in Polarkoordinaten ein, so erhalten wir:

$$S_1 + \frac{1}{i}\frac{\partial S_1}{\partial\varphi} + e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial S_2}{\partial\vartheta} + i\operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{\partial S_2}{\partial\varphi}\right) = kS_1$$
$$S_2 - \frac{1}{i}\frac{\partial S_2}{\partial\varphi} + e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial S_1}{\partial\vartheta} + i\operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{\partial S_1}{\partial\varphi}\right) = kS_2. \tag{9}$$

Nach Ausführung der Operation $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ und Heraushebung der Faktoren $e^{im\varphi}$ und $e^{i(m+1)\varphi}$ erhalten wir für Θ_1 und Θ_2 die Gleichungen:

$$\frac{d\Theta_2}{d\vartheta} + (m+1)\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\Theta_2 = (-k+1+m)\Theta_1$$
$$\frac{d\Theta_1}{d\vartheta} - m\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\Theta_1 = (k+m)\Theta_2. \tag{10}$$

Elimination von Θ_2 liefert für Θ_1 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\Theta_1}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\cdot\frac{d\Theta_1}{d\vartheta} + \left(k^2 - k - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta_1 = 0. \tag{11}$$

Elimination von Θ_1 die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\Theta_2}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\cdot\frac{d\Theta_2}{d\vartheta} + \left(k^2 - k - \frac{(m+1)^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta_2 = 0. \tag{12}$$

Dies sind die wohlbekannten Differentialgleichungen für die Kugelfunktionen P_l^m resp. P_l^{m+1} wenn wir setzen:

$$\boxed{k^2 - k = l(l+1)}. \tag{13}$$

Wir erhalten für l zwei Werte

$$l_1 = k - 1,\ l_2 = -k.$$

Wegen der Identität [1])

$$P_l^m = P_{-(l+1)}^m \tag{14}$$

ergeben beide Werte dieselbe Kugelfunktion und wir erhalten

$$\Theta_1 = a_1 P_{k-1}^m(\cos\vartheta),\ \Theta_2 = b_1 P_{k-1}^{m+1}(\cos\vartheta) \tag{15}$$

wo a_1 und b_1 zwei Konstanten sind.

Die Differentialgleichungen für die Φ_1 und Φ_2 erhalten wir aus (11) und (12), wenn wir $+k$ durch $-k$ ersetzen. Aus (13) wird dann

$$k^2 + k = l(l+1)$$

und wir finden für l zwei Werte

$$l_1 = k,\ l_2 = -(k+1),$$

die beide wegen (14) dieselbe Kugelfunktion geben.

$$\Phi_1 = a_2 P_k^m(\cos\vartheta)\quad \Phi_2 = b_2 P_k^{m+1}(\cos\vartheta). \tag{16}$$

Setzen wir in (10) die Werte von Θ_1 und Θ_2, so sehen wir, daß es nur auf das Verhältnis $b_1/a_1 = \lambda_1$ ankommt. Aus (10) wird:

$$\frac{dP_{k-1}^m}{d\vartheta} - m\operatorname{ctg}\vartheta\cdot P_{k-1}^m = (k+m)\lambda_1 P_{k-1}^{m+1}.$$

Unter Benutzung der leicht ableitbaren Beziehung bei den Kugelfunktionen:

$$\frac{dP_l^m}{d\vartheta} = m\cdot\operatorname{ctg}\vartheta\cdot P_l^m - P_l^{m+1}$$

folgt

$$-P_{k-1}^{m+1} = (k+m)\lambda_1 P_{k-1}^{m+1},$$

woraus sich

$$\lambda_1 = -\frac{1}{m+k}$$

ergibt. Bei Φ_1 und Φ_2 erhalten wir für λ_2 den Wert

$$\lambda_2 = -\frac{1}{m-k}.$$

Wir haben nun die Winkeleigenfunktionen ermittelt zu:

$$\boxed{\begin{aligned} S_1 &= e^{im\varphi}P_{k-1}^m(\cos\vartheta)\\ S_2 &= -\frac{e^{i(m+1)\varphi}}{m+k}P_{k-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\\ T_1 &= e^{im\varphi}P_k^m(\cos\vartheta)\\ T_2 &= -\frac{e^{i(m+1)\varphi}}{m-k}P_k^{m+1}(\cos\vartheta). \end{aligned}} \tag{17}$$

1) Vgl. Courant-Hilbert. VII § 3. 1.

§ 5. Auswahlregel, Feinstruktur.

Um die Auswahlregeln zu finden, müssen wir ermitteln, welche Matrixelemente der Koordinate verschwinden. Für die Quantenzahl m liefert die Diracsche Theorie nichts neues, da die φ-Abhängigkeit dieselbe ist, wie in der früheren. Für die Quantenzahl k liefert die Theorie außer den Übergängen

$$k' \to k+1, \quad k' \to k-1$$

noch der Übergang

$$k' \to -k,$$

wie wegen (14) aus

$$\int x P_k P_{-k}\, dv = \int x P_k P_{k-1}\, dv \neq 0$$

folgt. Daher wird die Anzahl der Feinstrukturkomponenten im Einklang mit der Erfahrung größer, als nach der alten Sommerfeldschen Theorie, die nur positive Werte von k zuläßt.

Relativistische Dubletts. In der nichtrelativistischen Theorie fallen alle Terme, die verschiedenen Werten von k aber gleichen Werten von l entsprechen, zusammen. Da nach (13)

$$k(k-1) = l(l+1)$$

ist, folgt, daß die Terme, die den Werten $-k$ und $k+1$ entsprechen, relativistische Dubletts bilden. Der Grundzustand ist aber einfach, da für ihn, wie wir gesehen haben, k nur positive Werte annehmen kann.

Abschirmungsdubletts. Nach der Feinstrukturformel fallen die Terme mit den Werten $+k$ und $-k$ exakt zusammen. In einem nichtcoulombschen Felde wird diese Entartung aufgehoben und es erscheinen Abschirmungsdubletts. Ein Vergleich der alten Zuordnung der Terme des Wasserstoffs mit der Diracschen liefert die Tabelle.

Abschirmungsdubletts (obere Bögen).

Term		$^1_2 s$ $^1_2 p$	$^3_2 p$ $^3_2 d$	$^5_2 d$
Alte Theorie	$l=$	0	1	2
	$j=$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
Dirac	$k=$	1 -1	$+2$ -2	$+3$

(Untere Bögen) — Relativistische Dubletts.

Grundzustand des Wasserstoffes.

Für $n_r = 0$, $k = +1$, $m = 0$ ergaben sich für den Wasserstoff folgende Funktionen:

$$N_1 = N(s_0+1),\ N_2 = -Na,\ s_0 = \sqrt{1-\alpha^2}$$
$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = +1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_1 &= N(s_0+1)\, e^{-\frac{r}{a}} r^{s_0} \\ \psi_2 &= 0 \\ \psi_3 &= -Na\, e^{-\frac{r}{a}} r^{s_0} \cos\vartheta \\ \psi_4 &= -Na\, e^{-\frac{r}{a}} r^{s_0} \sin\vartheta\, e^{i\varphi} \end{aligned}}$$

Beim Grenzübergang $c \to \infty$, d. h. $a \to 0$ wird

$$\psi_3 \to 0 \quad \psi_4 \to 0.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist durch

$$\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4$$
$$= N^2\left\{\left(\sqrt{1-\alpha^2}+1\right)^2 + \alpha^2\right\} e^{-\frac{2r}{a}} r^{2(s_0-1)}$$

gegeben und ist kugelsymmetrisch, wie es sein muß. Der Normierungsfaktor N ergibt sich durch die Forderung

$$\int \psi^* \psi\, dv = 1.$$

Kapitel III. (Lit. (12) (13)).

Spinoranalyse.

§ 1. Lorentztransformation.

Eine lineare homogene Transformation

$$x^{i'} = \sum_k l_{ik} x^k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \qquad (1)$$

welche die bilineare Form

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = c^2 x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \qquad (2)$$

invariant läßt, heißt eine Lorentztransformation. Setzen wir

$$c^2 x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x_0 y^0 + x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3, \qquad (3)$$

so haben wir zwischen kontravarianten (y^0, y^1, y^2, $y^3 \sim t, x, y, z$) und kovarianten Komponenten (y_0, y_1, y_2, $y_3 \sim c^2 t$, $-x$, $-y$, $-z$) des Vektors $\mathfrak{y}$ zu unterscheiden. (Das Zeichen $\sim$ bedeutet hier und im folgenden: transformiert sich bei einer Transformation wie . . .) Der Übergang von den kontra- zu den kovarianten Komponenten geschieht gemäß den Formeln

$$c^2 x^0 = x_0,\ x^1 = -x_1,\ x^2 = -x_2,\ x^3 = -x_3 \qquad (4)$$

und ebenso für alle Tensoren, z. B.

$$c^4 a^{00} = a_{00},\ c^2 a^{0i} = -a_{0i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die Lorentztransformationen bilden eine sechsgliedrige Gruppe, da jede Transformation durch Angabe der drei Raumdrehungen und der drei Geschwindigkeitskomponenten vollständig bestimmt ist. Die Lorentztransformationen $\mathfrak{L}$ zerfallen in zwei Schichten: die „positiven" $\mathfrak{L}^+$ mit der Determinante $+1$ und die „negativen" $\mathfrak{L}^-$ mit der Determinante -1.

Die positiven verändern nicht die Ablaufsrichtung der Zeit, und wenn wir uns nur auf diese beschränken, tragen wir der in der Natur vorhandenen Wesenverschiedenheit zwischen Vergangenheit und Zukunft Rechnung. Diese Einschränkung hebt aber auch die in der Natur vorhandene Gleichberechtigung von rechts und links auf. Um sie wieder herzustellen, erweitern wir die $\mathfrak{L}^+$ Gruppe durch die Operation:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Raumspiegelung am Nullpunkt}\\ t' = t\ x' = -x\ \ y' = -y\ \ z' = -z\end{array}} \quad (5)$$

Die so erweiterte $\mathfrak{L}^+$ Gruppe wollen wir die „volle Lorentzgruppe" nennen.

§ 2. Binäre Transformationen.

Neben der vierreihigen reellen linearen Substitutionsgruppe der Lorentztransformationen betrachten wir die zweireihige Transformationsgruppe von der Determinante 1 in zwei komplexen Variablen

$$\boxed{\begin{aligned}\xi^{1'} &= b_{11}\xi^1 + b_{12}\xi^2\\ \xi^{2'} &= b_{21}\xi^1 + b_{22}\xi^2\end{aligned}} \quad (6)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{\xi}^{1'} &= \bar{b}_{11}\bar{\xi}^1 + \bar{b}_{12}\bar{\xi}^2\\ \bar{\xi}^{2'} &= \bar{b}_{21}\bar{\xi}^1 + \bar{b}_{22}\bar{\xi}^2\end{aligned}} \quad (\bar{6})$$

$$|b_{ik}| = 1.$$

Wobei der Strich das konjugiert Komplexe bedeutet. Die zweikomponentige komplexe Größe $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ wollen wir, einem Vorschlag von P. Ehrenfest folgend, als Spinvektor oder Spinor bezeichnen. Bei der unimodularen Transformation (6, $\bar{6}$) bleibt

$$[\xi \times \eta] = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 \quad (7)$$

invariant. Setzen wir analog zu (3)

$$\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 = \xi^1\eta_1 + \xi^2\eta_2, \quad (8)$$

so haben wir zwischen Kontravarianten (ξ^1, ξ^2) und kovarianten Komponenten (ξ_1, ξ_2) eines Spinors ξ zu unterscheiden. Der Übergang von den kontra- zu den kovarianten Komponenten geschieht gemäß der Formel

$$\xi^1 = -\xi_2 \quad \xi^2 = \xi_1 \quad (9)$$

und ebenso für alle Spintensoren, d. h. Größe, die sich wie die Produkte z. B.

$$a^{12} \sim \xi^1\xi^2 \quad a^1_2 \sim \xi^1\xi_2$$

von Spinkomponenten transformieren.

Wir verabreden bei allen Größen, die nach der konjugiert komplexen Transformation ($\bar{6}$) transformiert werden, über dem Index einen Strich zu schreiben.

Es transformiert sich z. B.

$$\bar{\xi}_{\dot{\lambda}} \sim \bar{\xi}_{\dot{\lambda}} \qquad a^{\lambda}_{\dot{\mu}\varrho} \sim \xi^{\lambda}\overline{\eta_{\mu}}\zeta_{\varrho}.$$

Die unimodularen binären Transformationen bilden, wie leicht abzuzählen ist, eine sechsgliedrige Gruppe. Diesen Umstand können wir in der Weise ausnutzen, daß wir jeder binären Transformation des Spinors

$$\xi' = B\xi$$

eine Lorentztransformation des Vektors

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{L}\mathfrak{r}$$

zuordnen. Und zwar werden wir die Zuordnung so treffen, daß bei Zusammensetzung zweier $\mathfrak{L}$ auch die zugeordneten B zusammengesetzt werden, d. h. daß dem Produkt zweier $\mathfrak{L}$ wieder das Produkt zweier B entspricht. Stehen zwei Gruppen in solcher Beziehung, so heißen sie isomorph und jede von ihnen bildet eine Darstellung der anderen.

§ 3. Binäre Darstellung der „positiven" Lorentzgruppe.

Die gesuchte Zuordnung der Lorentzgruppe zu der binären können wir auf folgende Weise erreichen:

Die hermitische Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi^1\bar{\xi}^1 + \eta^1\bar{\eta}^1, & \xi^1\bar{\xi}^2 + \eta^1\bar{\eta}^2 \\ \xi^2\bar{\xi}^1 + \eta^2\bar{\eta}^1, & \xi^2\bar{\xi}^2 + \eta^2\bar{\eta}^2 \end{vmatrix} \quad (10)$$

bleibt bei der Transformation (6) und ($\bar{6}$) invariant. Bei der Lorentztransformation haben wir die Invariante

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \begin{vmatrix} ct + z, & x - iy \\ x + iy, & ct - z \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Ordnen wir nun die Matrizen der beiden Determinanten (10) und (11) gliederweise einander zu, so können wir sagen, daß sich folgende Größen gleich transformieren:

$$\boxed{\begin{aligned} ct + z &\sim \xi^1\bar{\xi}^1\\ ct - z &\sim \xi^2\bar{\xi}^2\\ x - iy &\sim \xi^1\bar{\xi}^2\\ x + iy &\sim \xi^2\bar{\xi}^1 \end{aligned}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\begin{aligned} ct &\sim \tfrac{1}{2}(\xi^1\bar{\xi}^1 + \xi^2\bar{\xi}^2)\\ z &\sim \tfrac{1}{2}(\xi^1\bar{\xi}^1 - \xi^2\bar{\xi}^2)\\ x &\sim \tfrac{1}{2}(\xi^1\bar{\xi}^2 + \xi^2\bar{\xi}^1)\\ y &\sim \frac{1}{2i}(\xi^2\bar{\xi}^1 - \xi^1\bar{\xi}^2) \end{aligned}} \quad (12)$$

Die Koordinaten t, x, y, z erleiden eine Lorentztransformation, wenn die Spinoren ξ und $\bar{\xi}$ gemäß $\xi' = B\xi$ und $\bar{\xi}' = \bar{B}\bar{\xi}$ transformiert werden. Die Koordinaten erleiden ferner dieselbe Transformation, wenn ξ und $\bar{\xi}$ gemäß $\xi' = -B\xi$ und $\bar{\xi}' = -\bar{B}\bar{\xi}$ transformiert werden. Die

binäre Gruppe bildet also eine zweideutige Darstellung der Lorentzgruppe

$$\mathfrak{L} \rightarrow +B$$
$$\mathfrak{L} \rightarrow -B.$$

Die Lorentzgruppe aber eine eindeutige Darstellung der binären Gruppe

$$B \rightarrow \mathfrak{L}.$$

Alle Lorentztransformationen lassen sich nun aus zwei speziellen Transformationen zusammensetzen, für die sich die binäre Darstellung leicht explizite angeben läßt.

I. Gleichmäßige Bewegung mit der Geschwindigkeit v in der z-Richtung

$$\mathfrak{L}: ct' = \frac{ct - \beta z}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad z' = \frac{z - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \beta = \frac{v}{c},$$

oder

$$ct' + z' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(ct + z)$$

$$ct' - z' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}(ct - z).$$

Bezeichnen wir

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1-\beta}} = \gamma^2, \text{ so folgt } \gamma = \pm\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Das zugehörige B_v ist

$$\xi^{1'} = \pm\gamma\xi^1 \qquad \xi^{2'} = \pm\frac{1}{\gamma}\xi^2.$$

II. Drehung um den Winkel φ in der xy-Ebene

$$x' + iy' = e^{-i\varphi}(x + iy)$$
$$x' - iy' = e^{i\varphi}(x - iy).$$

Das zugehörige B_φ ist

$$\xi^{1'} = \pm e^{\frac{i\varphi}{2}}\xi^1 \qquad \xi^{2'} = \pm e^{-\frac{i\varphi}{2}}\xi^2.$$

§ 4. Untergruppe der Raumdrehungen.

Wollen wir die Untergruppe der Raumdrehungen aussondern, so müssen wir in der binären Darstellung diejenige Untergruppe betrachten, welche die Zeit invariant läßt. Wir müssen also die unimodulare binäre Transformation B so spezialisieren, daß sie die Form

$$ct \sim \xi^1\bar{\xi}^{\bar{1}} + \xi^2\bar{\xi}^{\bar{2}}$$

invariant läßt. Eine solche binäre Transformation heißt eine unitäre. Sie hat die Form

$$U = \begin{vmatrix} \alpha + i\beta, & -\gamma + i\delta \\ \gamma + i\delta, & \alpha - i\beta \end{vmatrix} \text{ wobei } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1. \tag{13}$$

Die Zahl der unabhängigen Parameter ist gleich drei entsprechend der Zahl der Parameter der Raumdrehungen.

§ 5. Die In- und Kovarianten der Spinoranalyse.

Wir verallgemeinern die Formeln (12) zu allgemeinen Beziehungen zwischen Vektoren und Spinoren

Kontravarianter Vektor a^i

$$\begin{aligned} ca^0 + a^3 &\sim \xi^1\bar{\xi}^{\bar{1}} \sim a^{1\bar{1}} = a_{2\bar{2}} \\ ca^0 - a^3 &\sim \xi^2\bar{\xi}^{\bar{2}} \sim a^{2\bar{2}} = a_{1\bar{1}} \\ a^1 - ia^2 &\sim \xi^1\bar{\xi}^{\bar{2}} \sim a^{1\bar{2}} = -a_{2\bar{1}} \\ a^1 + ia^2 &\sim \xi^2\bar{\xi}^{\bar{1}} \sim a^{2\bar{1}} = -a_{1\bar{2}} \end{aligned} \tag{14}$$

Kovarianter Vektor a_i

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}a_0 + a_3 &\sim \xi^2\bar{\xi}^{\bar{2}} \sim a^{2\bar{2}} = a_{1\bar{1}} \\ \frac{1}{c}a_0 - a_3 &\sim \xi^1\bar{\xi}^{\bar{1}} \sim a^{1\bar{1}} = a_{2\bar{2}} \\ a_1 - ia_2 &\sim -\xi^1\bar{\xi}^{\bar{2}} \sim -a^{1\bar{2}} = a_{2\bar{1}} \\ a_1 + ia_2 &\sim -\xi^2\bar{\xi}^{\bar{1}} \sim -a^{2\bar{1}} = a_{1\bar{2}} \end{aligned} \tag{14'}$$

wobei (14') durch Berücksichtigung von (4) aus (14) folgt. Auch der kovariante Gradiententensor kann unbenannt werden durch Einführung der Spinordifferentiationen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} &= \partial_{1\bar{1}} = \partial^{2\bar{2}} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} &= \partial_{2\bar{2}} = \partial^{1\bar{1}} \\ \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} &= \partial_{2\bar{1}} = -\partial^{1\bar{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} &= \partial_{1\bar{2}} = -\partial^{2\bar{1}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Aus (14) folgt der Ausdruck für die Invariante $a_i a^i$ durch die Spinoren

$$\begin{aligned} a_i a^i &= (ca^0 + a^3)(ca^0 - a^3) - (a^1 + ia^2)(a^1 - ia^2) \\ &= a^{1\bar{1}}a^{2\bar{2}} - a^{2\bar{1}}a^{1\bar{2}} \\ &= \tfrac{1}{2}(a^{1\bar{1}}a_{1\bar{1}} + a^{2\bar{2}}a_{2\bar{2}} + a_{2\bar{1}}a^{2\bar{1}} + a^{1\bar{2}}a_{1\bar{2}}) \\ &= \tfrac{1}{2}a^{\mu\bar{\nu}}a_{\mu\bar{\nu}}, \end{aligned}$$

wobei über oben und unten vorkommende Indizes stets summiert werden soll. Für weitere Invarianten der Vektoranalyse folgen die entsprechenden Invarianten der Spinoranalyse

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \tfrac{1}{2}\partial_{\mu\bar{\nu}}\partial^{\mu\bar{\nu}} \\ a_i b^i &= \tfrac{1}{2}a^{\mu\bar{\nu}}\beta_{\mu\bar{\nu}} \\ \frac{\partial}{\partial x^i}a^i &= \frac{1}{2}\partial_{\mu\bar{\nu}}a^{\mu\bar{\nu}}. \end{aligned} \tag{15'}$$

Nun können wir allgemeine lorentzinvariante Gleichungen für die Spinoren aufstellen, genau so, wie es in der Tensoranalyse möglich ist.

So ist z. B. die allgemeinste lineare Differentialgleichung erster Ordnung für den Spinor ξ^λ offenbar

$$\hat{c}_{\lambda\bar{\mu}}\,\xi^\lambda + a_{\lambda\bar{\mu}}\,\xi^\lambda + \beta_{\bar{\mu}} = 0$$

genau so, wie im Gebiete der Tensoren die Gleichung

$$\frac{\hat{c}\,S^{\lambda\mu}}{\hat{c}\,x^\lambda} + a_\lambda\,S^{\lambda\mu} + b^\mu = 0.$$

§ 6. Darstellung der „vollen" Lorentzgruppe.

Um auch die Transformation: Raumspiegelung am Nullpunkt in der binären Darstellung mit zu berücksichtigen, stehen uns nur zwei Wege zur Verfügung:

I. Neben der Transformation (6) und $(\bar{6})$ lassen wir noch die Transformation

$$\begin{aligned}\xi^{1'} &= \bar{\xi}_1\\ \xi^{2'} &= \bar{\xi}_2\end{aligned} \qquad (16)$$

zu. Wie aus (12) folgt, erleiden dabei die Raumkoordinaten eine Spiegelung am Nullpunkt. Diese Transformation ist aber keine lineare Transformation, sondern mit einem Übergang zum Komplexkonjugierten verbunden. Wollen wir aber bei den rein linearen Transformationen bleiben, so steht uns nur der zweite Weg zur Verfügung.

II. Wir führen neben dem Spinor $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ noch einen zweiten Spinor $\eta_i = (\eta^1, \eta^2)$ ein. Dann transformieren sich a^i und b^i nach der zugehörigen Lorentztransformation wie Vektoren.

$$\begin{aligned}
c\,a^0 &\sim (\xi^1\bar{\xi}^1 + \xi^2\bar{\xi}^2)\\
a^1 &\sim (\xi^1\bar{\xi}^2 + \xi^2\bar{\xi}^1)\\
a^2 &\sim \frac{1}{i}(\xi^2\bar{\xi}^1 - \xi^1\bar{\xi}^2)\\
a^3 &\sim (\xi^1\bar{\xi}^1 - \xi^2\bar{\xi}^2)\\
c\,b^0 &\sim (\eta^1\bar{\eta}^1 + \eta^2\bar{\eta}^2) = \overline{(\eta_1\eta_1 + \eta_2\eta_2)}\\
b^1 &\sim (\eta^1\bar{\eta}^2 + \eta^2\bar{\eta}^1) = \overline{(\eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_1)}\\
b^2 &\sim \frac{1}{i}(\eta^2\bar{\eta}^1 - \eta^1\bar{\eta}^2) = -\frac{1}{i}\overline{(\eta_2\eta_1 - \eta_1\eta_2)}\\
b^3 &\sim (\eta^1\bar{\eta}^1 - \eta^2\bar{\eta}^2) = -\overline{(\eta_1\eta_1 - \eta_2\eta_2)}.
\end{aligned}$$

Daher transformiert sich auch $a^i + b^i$ wie ein Vektor und wir können setzen:

$$\boxed{\begin{aligned}
c\,t &\sim (\xi^1\bar{\xi}^1 + \xi^2\bar{\xi}^2) + \overline{(\eta_1\eta_1 + \eta_2\eta_2)}\\
x &\sim (\xi^1\bar{\xi}^2 + \xi^2\bar{\xi}^1) - \overline{(\eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_1)}\\
y &\sim \frac{1}{i}(\xi^2\bar{\xi}^1 - \xi^1\bar{\xi}^2) - \frac{1}{i}\overline{(\eta_2\eta_1 - \eta_1\eta_2)}\\
z &\sim (\xi^1\bar{\xi}^1 - \xi^2\bar{\xi}^2) - \overline{(\eta_1\eta_1 - \eta_2\eta_2)}
\end{aligned}} \qquad (17)$$

Wir haben erhalten vier hermitische Formen in den Variablen

$$\boxed{\xi^1,\ \xi^2,\ \bar{\eta}_1,\ \bar{\eta}_2}\ .$$

Unter dem Einfluß einer binären Transformation erleiden die Koordinaten eine Lorentztransformation. Jetzt können wir aber auch noch die Raumspiegelung erzeugen, und zwar durch die lineare Substitution:

Vertauschung der beiden Spinoren

$$\boxed{\xi^{1'} = \bar{\eta}_1,\ \ \xi^{2'} = \bar{\eta}_2,\ \ \bar{\eta}_1' = \xi^1,\ \ \bar{\eta}_2' = \xi^2}\ . \qquad (18)$$

§ 7. Auftreten der vierreihigen Matrizen.

In (17) haben wir vier hermitische Formen, mit den zugehörigen Matrizen

$$\beta_0 = \begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\quad \beta_1 = \begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\beta_2 = \begin{vmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{vmatrix}\quad \beta_3 = \begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix} \qquad (19)$$

Die Operation (18) wird durch die vierreihige Matrix

$$\beta_4 = \begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{vmatrix} \qquad (20)$$

dargestellt. Die Matrizen β_1, β_2, β_3, β_4 gehorchen, wie man sich leicht überzeugt, denselben Vertauschungsrelationen, die wir für die Geschwindigkeitsoperatoren aufgestellt haben. Vom Standpunkt der Spinoranalyse ist es natürlicher die β_i zu benutzen, als die α_i, die wir im ersten Kapitel eingeführt haben, um uns möglichst eng an die nichtrelativistische Theorie anzupassen. Die β_i entstehen aus den α_i durch eine unitäre Transformation

$$\beta_i = U^{-1}\,\alpha_i\,U,$$

wo

$$U = U^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \quad (21)$$

Die Diracschen Gleichungen lauten in der α-Darstellung (der Diracschen)

$$\frac{P_0}{c}\psi = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 \mu c)\,\psi.$$

In der β-Darstellung (der Weylschen)

$$\frac{P_0}{c}\varphi = (\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3 + \beta_4 \mu c)\,\varphi$$

$$U\frac{P_0}{c}U^{-1}\varphi = U(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 \mu c)U^{-1}\varphi,$$

woraus $\psi = U^{-1}\varphi$ folgt. Zwischen den Wellenfunktionen der beiden Darstellungen bestehen also die einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_3) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_4) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_3) \\ \varphi_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 - \psi_4) \end{aligned}\right| \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_3) \\ \psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 + \varphi_4) \\ \psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_3) \\ \psi_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 - \varphi_4) \end{aligned}\right| \quad (22')$$

§ 8. Beweis der Lorentzinvarianz.

Um die Lorentzinvarianz der Diracschen Gleichungen

$$\frac{P_0}{c}\varphi = (\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3 + \beta_4 \mu c)\,\varphi \quad (*)$$

zu beweisen, müssen wir zeigen, daß, wenn sich die P_i im neuen gestrichenen Koordinatensystem, in

$$P_i' = \sum_k l_{ik} P_k$$

übergehen wir stets eine der Lorentztransformation zugeordnete lineare Transformation der Wellenfunktion angeben können

$$\varphi_i' = \sum_k \gamma_{ik}\varphi_k \quad (23)$$

derart, daß die Gleichung (*) ihre Gestalt nicht ändert und im neuen Koordinatensystem

$$\frac{P_0'}{c}\varphi' = (\beta_1 P_1' + \beta_2 P_2' + \beta_3 P_3' + \beta_4 \mu c)\,\varphi' \quad (*')$$

lautet. Unter Benutzung der Paulischen Matrizen schreiben wir (*) in der Form von zwei zweikomponentigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{P_0}{c} - s_1 P_1 - s_2 P_2 - s_3 P_3\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} - \mu c\begin{pmatrix}\varphi_3\\ \varphi_4\end{pmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{P_0}{c} + s_1 P_1 + s_2 P_2 + s_3 P_3\right)\begin{pmatrix}\varphi_3\\ \varphi_4\end{pmatrix} - \mu c\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} &= 0. \end{aligned}\right| \quad (*)$$

Es ist

$$(P_0 - s_1 P_1 - s_2 P_2 - s_3 P_3) = \begin{pmatrix} \frac{P_0}{c} - P_3, & -P_1 + iP_2 \\ -P_1 - iP_2, & \frac{P_0}{c} + P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi^{11}, \Pi^{12} \\ \Pi^{21}, \Pi^{22} \end{pmatrix}$$

und (*)

$$(P_0 + s_1 P_1 + s_2 P_2 + s_3 P_3) = \begin{pmatrix} \frac{P_0}{c} + P_3, & P_1 - iP_3 \\ P_1 + iP_2, & \frac{P_0}{c} - P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi^{11} \Pi^{21} \\ \Pi^{12} \Pi^{22} \end{pmatrix}$$

wo

$$\Pi^{k\mu} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^{k\mu}} + eA^{k\mu}$$

der dem Vektor

$$P_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^k} + eA_k$$

zugeordnete Spintensor ist. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix}\Pi^{11}, \Pi^{12} \\ \Pi^{21}, \Pi^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} - \mu c\begin{pmatrix}\varphi_3\\ \varphi_4\end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix}\Pi_{11} \Pi_{21} \\ \Pi_{12} \Pi_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_3\\ \varphi_4\end{pmatrix} - \mu c\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} &= 0. \end{aligned}\right| \quad (*)$$

Daraus läßt sich die gesuchte Transformation (23) einfach ablesen

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1 &\sim \bar{\eta}_1;\ \varphi_3 \sim \xi^1 \\ \varphi_2 &\sim \bar{\eta}_2;\ \varphi_4 \sim \xi^2 \end{aligned}}, \quad (24)$$

wo η und ζ zwei Spinoren sind. Die Diracschen Gleichungen lassen sich also in der Form schreiben:

$$\boxed{\Pi^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} - \mu c\,\xi^{\alpha} = 0 \quad \Pi_{\alpha\dot\beta}\xi^{\alpha} - \mu c\,\eta_{\dot\beta} = 0}, \tag{*}$$

in welcher ihre Lorentzinvarianz evident ist. Bei einer Lorentztransformation transformieren sich also $\varphi_1\varphi_2$ unter sich und $\varphi_3\varphi_4$ unter sich und zwar nach den zugehörigen binären Darstellungen der Lorentzgruppe. Bei einer Raumdrehung ist $B = U$, $B^{-1} = U$ und $(\varphi_1\varphi_2)$ $(\varphi_3\varphi_4)$ transformieren sich nach derselben unitären Darstellung der Raumdrehungsgruppe.

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 \quad \varphi_3' = U_{11}\varphi_3 + U_{12}\varphi_4 \\ \varphi_2' &= U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2 \quad \varphi_4' = U_{21}\varphi_3 + U_{22}\varphi_4. \end{aligned} \tag{25}$$

§ 9. Der Diracsche Erhaltungssatz.

Schreiben wir zu dem System der Diracschen Gleichungen das komplexkonjugierte System und multiplizieren mit den daneben angeführten Faktoren

$$\begin{aligned} \xi^{\bar\alpha} &\quad \frac{h}{2\pi i}\hat c_{\bar\alpha\beta}\,\xi^{\beta} + eA_{\bar\alpha\beta}\,\xi^{\beta} - \mu c\,\eta_{\bar\alpha} = 0 \\ \eta^{\beta} &\quad \frac{h}{2\pi i}\hat c_{\bar\alpha\beta}\,\eta^{\bar\alpha} + eA_{\bar\alpha\beta}\,\eta^{\bar\alpha} - \mu c\,\xi_{\beta} = 0 \end{aligned} \tag{†}$$

$$\begin{aligned} \xi^{\alpha} &\quad -\frac{h}{2\pi i}\hat c_{\alpha\bar\beta}\,\xi^{\bar\beta} + eA_{\alpha\bar\beta}\,\xi^{\bar\beta} - \mu c\,\eta_{\alpha} = 0 \\ \eta^{\bar\beta} &\quad -\frac{h}{2\pi i}\hat c_{\alpha\bar\beta}\,\eta^{\alpha} + eA_{\alpha\bar\beta}\,\xi^{\alpha} - \mu c\,\xi_{\bar\beta} = 0 \end{aligned} \tag{†}$$

Durch Substraktion von (†) und (†) folgt:

$$\xi^{\bar\alpha}\hat c_{\bar\alpha\beta}\,\xi^{\beta} + \xi^{\alpha}\hat c_{\alpha\bar\beta}\,\xi^{\bar\beta} + \eta^{\beta}\hat c_{\bar\alpha\beta}\,\eta^{\bar\alpha} + \eta^{\bar\beta}\hat c_{\alpha\bar\beta}\,\eta^{\alpha} = 0,$$

da die zweiten und dritten Terme sich überall wegheben, woraus

$$\hat c_{\alpha\dot\beta}\,(\xi^{\alpha}\,\xi^{\beta} + \eta^{\dot\alpha}\,\eta^{\dot\beta}) = 0 \tag{26}$$

oder nach (15) in gewohnter vektorieller Form geschrieben

$$\boxed{\frac{\hat c\, s^0}{\hat c\, x^0} + \frac{\hat c\, s^1}{\hat c\, x^1} + \frac{\hat c\, s^2}{\hat c\, x^2} + \frac{\hat c\, s^3}{\hat c\, x^3} = 0} \tag{26'}$$

wo s^i der Vektor mit den Komponenten[1])

$$\begin{aligned} s_0 &= \quad \bar\varphi_1\varphi_1 + \bar\varphi_2\varphi_2 + \quad \bar\varphi_3\varphi_3 + \bar\varphi_4\varphi_4 = \quad \varphi^*\cdot\beta_0\varphi = \quad \psi^*\cdot\alpha_0\psi \\ s_1 &= -\quad (\varphi_1\bar\varphi_2 + \varphi_2\bar\varphi_1) + \quad (\varphi_3\bar\varphi_4 + \varphi_4\bar\varphi_3) = -\varphi^*\cdot\beta_1\varphi = -\psi^*\cdot\alpha_1\psi \\ s_2 &= -\frac{1}{i}(\varphi_2\bar\varphi_1 - \varphi_1\bar\varphi_2) + \frac{1}{i}(\varphi_4\bar\varphi_3 + \varphi_3\bar\varphi_4) = -\varphi^*\cdot\beta_2\varphi = -\psi^*\cdot\alpha_2\psi \\ s_3 &= -\quad (\varphi_1\bar\varphi_1 - \varphi_2\bar\varphi_2) + \quad (\varphi_3\bar\varphi_3 - \varphi_4\bar\varphi_4) = -\varphi^*\cdot\beta_3\varphi = -\psi^*\cdot\alpha_3\psi \end{aligned} \tag{27}$$

Die physikalische Bedeutung des Vektors s^i ist folgende: s^0 ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron, ohne Rücksicht auf den Wert des Spins an der Stelle x, y, z zu finden, also die Dichte der Elektrizität. Die drei räumlichen Komponenten bilden den Strom, oder in der statistischen Deutung die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron durch eine Flächeneinheit in der Richtung i passiert. Gleichung (26) drückt also den Erhaltungssatz der Elektrizität aus. Wir haben somit die spinoranalytische Formulierung der Diracschen Theorie vollzogen. Als Ergebnis stellt sich heraus, daß der Vorgang der Elektronenwellen sich „feldmäßig" nicht in der vierdimensionalen Welt, sondern in einer binären Ebene mit zwei komplexen Dimensionen darstellen läßt. Die Bestimmungsgrößen dieses „Feldes" sind zwei Spinoren. Die Diracschen Gleichungen sind Feldgleichungen für diese Spinoren, die bei gegebenen Grenzbedingungen diese Größen zu berechnen gestatten. Ähnlich wie in der Maxwellschen Theorie sind nicht die Größen selbst, sondern nur bestimmte quadratische Formen aus ihnen einer direkten physikalischen Beobachtung zugänglich. In der Maxwellschen Theorie sind es Energiedichte $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$, der Poyntingsche Strom $\frac{c}{4\pi}[\mathfrak{H}\times\mathfrak{E}]$, und die Maxwellschen Spannungen, die zusammen einen symmetrischen Tensor — den Energieimpulstensor — bilden. Die Rolle dieser quadratischen Formen übernehmen in der Diracschen Theorie die hermitischen Formen (27), die zusammen einen Viervektor bilden.

Die Wellenmechanik ist entstanden aus dem Bestreben, für die de Broglie-Wellen eine ihnen entsprechende Wellenoptik zu entwickeln. In der Schrödingerschen Theorie wird der Wellenvorgang beschrieben durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine skalare Wellenfunktion ψ. Die Entwicklung von Schrödinger zu Dirac steht in enger Analogie mit der Entwicklung der Wellenoptik von Fresnel zu Maxwell. Bei Fresnel wird der optische Vorgang erfaßt durch eine skalare Wellenglei-

[1]) Der Unterschied im Vorzeichen gegenüber der üblichen Definition des Stromes rührt daher, das wir in der Dirac-Gleichung

$$\frac{W}{c} = \pm(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\mu c)$$

immer das + Zeichen gewählt haben.

chung zweiter Ordnung. Dabei konnten die Erscheinungen der Polarisation nur durch ad hoc eingeführte Hypothesen über die elastischen Eigenschaften des Äthers gedeutet werden. In der Wellenoptik von Maxwell tritt an die Stelle einer Gleichung zweiter Ordnung für eine Größe ein System von simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung für die 6 Zustandsgrößen des elektromagnetischen Feldes $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$.

Durch dieses System wird aber die Polarisation auf eine ganz natürliche Weise in die Wellenoptik einbezogen. Durch Dirac wurde also die schon früher von Darwin ausgesprochene Vermutung bestätigt, daß der Spin als Polarisation der Materiewellen zu deuten ist.

Der tiefe Unterschied der beiden Wellentheorien besteht aber darin, daß ihre Darstellungsräume vollständig verschieden und nur durch die Isomorphie der beiden Transformationsgruppen einander zuzuordnen sind.

Literatur.

Es sind die grundlegenden Arbeiten angeführt:

Lorentzinvariante Schrödinger-Gleichung

1) O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **37**, 895, 1926.
2) W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **40**, 117, 1926.

Spinelektron.

3) S. Goudsmit und G. Uhlenbeck, Naturwissenschaften **13**, 953, 1925.
4) W. Pauli jr., Zeitschr. f. Phys. **43**, 601, 1927.
5) G. C. Darwin, Proc. Roy. Soc. **116**, 227, 1927.

Relativistische Quantenmechanik.

6) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. **117**, 610; **118**, 351, 1928.
7) G. Breit, Proc. Nat. Acad. Amer. **14**, 553, 1928.
8) V. Fock, Zeitschr. f. Phys. **55**, 127, 1929.
9) E. Schrödinger, Berliner Berichte 1930.

Keplerproblem.

10) W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **48**, 11, 1928.
11) G. C. Darwin, Proc. Roy. Soc. **118**, 654, 1928.

Spinoranalyse.

12) B. van der Waerden, Göttinger Nachrichten 1929.
13) H. Weyl, Zeitschr. f. Phys. **56**, 332, 1929.

Negative Energiewerte.

14) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. **126**, 360, 1929.
15) E. Schrödinger, Berliner Berichte 1931.
16) O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **53**, 157, 1929.

Allgemeine Werke.

P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mecanics. Deutsche Ausgabe, besorgt von Werner Bloch. Leipzig. S. Hirzel.
A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Ergänzungsband.
H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik.

Göttingen, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Eingegangen 25. Mai 1931.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Verteilung radioaktiver Stoffe in der freien Luft.

Von Josef Priebsch.

Mit Hilfe seiner Theorie des Massenaustausches 1) 2) (s. Literaturverzeichnis im Anhang) gelangt W. Schmidt zu der folgenden Differentialgleichung 3) für den Gehalt s der Masseneinheit Luft an einer radioaktiven Substanz der Zerfallskonstante λ sec^{-1} in Abhängigkeit von der Höhe z cm über dem Erdboden:

$$A\frac{d^2s}{dz^2}+\frac{dA}{dz}\frac{ds}{dz}-\varrho\lambda s=0. \qquad (1)$$

Hierin bedeutet ϱ die Dichte der Luft; sie ist als höhenunabhängig gedacht, so daß man z als eine fiktive Höhe in der homogenen Atmosphäre zu deuten hat, und zwar ist ϱ im folgenden stets mit $1{,}25\cdot10^{-3}$ g cm^{-3} angenommen. A ist die Größe des Austausches (in cm^{-1} g sec^{-1}).

Schon früher (1918) hatten V. F. Hess und W. Schmidt 4) das Problem unter Annahme eines für alle Höhen gleichen Austausches $\left(\frac{dA}{dz}=0\right)$ behandelt und die zugehörige Gleichung

$$A\frac{d^2s}{dz^2}-\varrho\lambda s=0 \qquad (2)$$

gelöst:

$$s(z)=s(1)\,e^{-\sqrt{a}\cdot z},\quad a=\frac{\varrho\lambda}{A},$$

den Begriff der Halbwertshöhe eingeführt und

als solche beispielsweise für Radiumemanation 1200 m gefunden.

Um den tatsächlichen Verhältnissen besser gerecht zu werden, entschloß sich W. Schmidt in der unter 3) zitierten Arbeit, den Austausch als mit der Höhe zunehmend in die Gleichung (1) einzuführen. Um die Abhängigkeit des Austausches von der Höhe genauer kennenzulernen, geht Schmidt 5) von der Gleichung aus, welche die durch den Massenaustausch beeinflußte Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit v von der Höhe angibt — es ist im Wesen dieselbe wie (1), nur unter Fortfall des Gliedes mit λ

$$A \frac{dv}{dz} = \text{const.} \qquad (3)$$

Für die Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit ergibt sich nun aber aus meteorologischen Beobachtungen

$$v(z) = v_1 z^{\frac{1}{\beta}}, \qquad (4)$$

wobei für β Werte von etwa 3 bis 7 in Betracht kommen. Für den Wert $\beta = 7$ spricht der Umstand, daß theoretische Untersuchungen über turbulente Strömung in Röhren für die Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit vom Abstand von der Wand eine Gesetzmäßigkeit von der Art der Beziehung (4) aufdecken, wobei der Exponent 1/7 auftritt.

Es ergeben nun (3) und (4) zusammen:

$$A(z) = A_1 z^{\frac{\beta-1}{\beta}}, \qquad (3a)$$

wobei A_1 numerisch der Austauschgröße in 1 cm Höhe $A(1)$ gleich ist, aber die Dimension cm $^{\frac{1}{\beta}-2}$ g sec^{-1} hat, und dies in Gleichung (1) eingetragen nach einer Umformung:

$$\frac{d^2 s}{dz^2} + \frac{\beta - 1}{\beta} \frac{1}{z} \frac{ds}{dz} - a_1 z^{-\frac{1-\beta}{\beta}} s = 0, \qquad (1a)$$

wobei $a_1 = \frac{\varrho \lambda}{A_1}$ gesetzt ist.

Als allgemeine Lösung von (1a) ist es Herrn A. Huber (s. W. Schmidt 3)) gelungen, die folgende zu finden:

$$s = B s_1 + C s_2 \qquad (5)$$

$$s_1 = \int_1^\infty e^{-pX} (p^2 - 1)^{-\frac{\beta+3}{2(\beta+1)}} dp, \qquad (5_1)$$

$$s_2 = \int_{-1}^1 e^{-pX} (p^2 - 1)^{-\frac{\beta+3}{2(\beta+1)}} dp, \qquad (5_2)$$

worin

$$X = \frac{2\beta}{\beta+1} \sqrt{a_1} \cdot z^{\frac{\beta+1}{2\beta}}.$$

Da wir uns die radioaktiven Stoffe als aus dem Erdboden herkommend und daher in großer Höhe in verschwindender Konzentration zu denken haben, ist nur s_1 als die im Unendlichen verschwindende Lösung für das Problem von Wert. s_2 wird für $z \to \infty$ und damit $X \to \infty$ wegen der negativen Werte der Integrationsvariabeln unendlich. Wird noch der Gehalt in Vielfachen des Gehaltes in der Höhe 1 cm ausgedrückt, so bekommen wir:

$$s^*(z) = s_1(z)/s_1(1). \qquad (6)$$

Unter der Annahme des Wertes $\beta = 7$ wurde in der in Rede stehenden Arbeit von W. Schmidt die Auswertung für die verschiedenen in Betracht kommenden radioaktiven Stoffe *RaEm*, *ThEm*, *AcEm*, *RaD*, *ThB*, *AcB* in der Weise ausgeführt, daß die Werte des Integrals

$$Q = \int_1^\infty e^{-pX} (p^2 - 1)^{-\frac{5}{8}} dp$$

oder

$$Q = \int_1^\infty 10^{-Np} (p^2 - 1)^{-\frac{5}{8}} dp,$$

wobei

$$N = MX = 0{,}434 \cdot {}^7/_4 \cdot \sqrt{\frac{\varrho \lambda}{A_1}} z^{4/7}$$

für verschiedene N und zwar von $N = 10^{-5}$ bis $N = 1000$ tabuliert wurden, dann in N der Reihe nach die verschiedenen Zerfallskonstanten eingesetzt und damit in die Tabelle eingegangen wurde. Bei einem dieser Schritte der numerischen Auswertung ist nun ein Versehen unterlaufen, indem für alle Substanzen statt mit N anscheinend mit dem Zehnfachen von N in jene Tabelle eingegangen wurde, was zur Folge hatte, daß eine zu rasche Abnahme des Gehaltes an allen Substanzen mit der Höhe — eine gegen das frühere Resultat von Hess und Schmidt überraschend rasche Abnahme — herauskam. In der zitierten Arbeit wird hiefür folgender Erklärungsversuch gegeben: „Es wirkt einerseits die geringere Durchmischung der unteren Schichten (bei der Annahme wachsenden Austausches gegenüber der konstanten) hemmend auf die Nachfuhr vom Boden, andererseits wird aber das, was dennoch in größere Höhen gelangt, wegen des dort größeren Austausches auf weiteren Raum verteilt."

Es soll nun zunächst der erwähnte Rechenfehler richtiggestellt werden. Da wir es jetzt mit einer wesentlich geringeren Abnahme aller radioaktiven Stoffe, also auch der Radiumemanation zu tun haben, so daß die bei der Aufstellung und Behandlung der Gleichung (1) ge-

Tabelle I.

Gehalt s^* in verschiedenen Höhen über dem Boden, ausgedrückt in Tausendteilen desjenigen in 0,01 m Höhe. ($\beta = 7$).

z in m	h in m	*RaEm* Austausch in 100 m Höhe:			*ThEm* Austausch in 100 m Höhe:			*ThB* Austausch in 100 m Höhe:		
		a) 50	b) 22,6	c) 110,5	a) 50	b) 22,6	c) 110,5	a) 50	b) 22,6	c) 110,5
0,01	0,01	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
0,02	0,02	975	973	980	904	890	924	973	965	975
0,05	0,05	942	936	951	768	730	805	927	923	940
0,1	0,1	916	910	923	660	615	711	898	888	904
0,2	0,2	887	886	898	543	471	608	863	844	875
0,5	0,5	850	837	860	387	303	457	815	793	833
1	1	816	804	832	274	191	349	774	741	794
2	2	784	767	800	173	102	253	721	677	753
5	5	736	709	757	71,6	29,6	134	640	586	684
10	10	691	655	721	26,6	7,2	66,6	570	513	624
20	20	630	592	676	6,5	2,5	24,7	499	435	555
50	50	565	505	605	3,6	0,1	4,0	396	324	462
100	100	494	435	546				316	247	386
200	201	423	359	484				235	165	308
500	512	324	257	391				138	80	206
1000	1053	250	182	317				77,5	35,8	134
2000	2261	176	115	244				34,8	11,5	75,6
3000	3622	137	91	202						
4000	5217	112	61	172						
5000	7138	94	48	151				7,1	2,1	24,8
6000	9648	80	38	135						
7000	13389	69	31	119				3,2	0,3	11,3

machte Voraussetzung, der Ursprung der behandelten radioaktiven Stoffe sei im Erdboden, für *RaD* nun als zu schlecht erfüllt erscheint, ist *RaD* fortgelassen; ebenso mögen *AcEm* und *AcB* aus den weiteren Betrachtungen ausgeschieden bleiben, diese wegen der geringen Mengen, in denen sie in der Freiluft vorhanden sind, und geringen Aussichten auf experimentelle Bestätigung der theoretischen Resultate.

Die richtiggestellten Tabellen IIa (unter der Annahme, der Austausch in 100 m oder 10^4 cm Höhe sei $A(10^4) = 50$ cm^{-1} g sec^{-1}, was auf $A_1 = 0{,}01864$ cm$^{-13/7}$ g sec^{-1} führt), IIb ($A(10^4) = 22{,}6$ cm^{-1} g sec^{-1} oder $A_1 = 0{,}008424$ cm$^{-13/7}$ g sec^{-1}) und IIc ($A(10^4) = 110{,}5$ cm^{-1} g sec^{-1} oder $A_1 = 0{,}04119$ cm$^{-13/7}$ g sec^{-1}) der zitierten Arbeit sind in etwas anderer Anordnung als dort und unter Fortfall der erwähnten Stoffe, — also nur für *RaEm* ($\lambda = 2{,}10 \cdot 10^{-6}$ sec^{-1}), *ThEm* ($\lambda = 1{,}27 \cdot 10^{-2}$ sec^{-1}) und *ThB* ($\lambda = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ sec^{-1}) — als Tabelle I der vorliegenden Arbeit angegeben. In der ersten Spalte stehen die fiktiven Höhen z in *m*, in der zweiten die diesen entsprechenden wahren Höhen h in *m*, die einer der ursprünglichen Tabellen Schmidts entnommen sind. Fig. 1 stellt die Ergebnisse graphisch dar, die Höhe z ist in logarithmischem, die Gehaltspromille sind in gewöhnlichem Maßstab aufgetragen. Denkt man sich $s^*(z)$ als von den zwei Parametern β und a_1

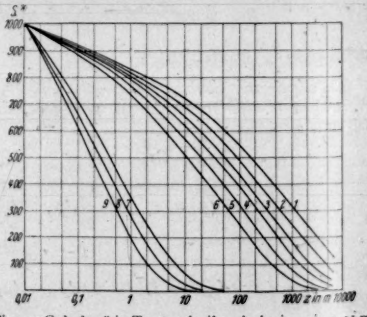


Fig. 1. Gehalt s^* in Tausendteilen desjenigen in 0,01 m Höhe, $\beta = 7$.
1, 2, 3 ... *RaEm* 1, 4, 7 ... $A(10^4) = 110{,}5$ cm^{-1} g sec^{-1}
4, 5, 6 ... *ThB* 2, 5, 8 ... $A(10^4) = 50{,}0$ cm^{-1} g sec^{-1}
7, 8, 9 ... *ThEm* 3, 6, 9 ... $A(10^4) = 22{,}6$ cm^{-1} g sec^{-1}

(siehe (1a), (5) und (6)) abhängende Kurvenschar, so zeigt die Figur außerdem die Abhängigkeit vom Parameter a_1 bei festem β ($\beta = 7$). a_1 wächst von den Kurven rechts in der Figur zu denen links.

Ferner erwähnte W. Schmidt in einem Briefe an Herrn Prof. Hess, daß es wünschenswert wäre, dieselbe Rechnung auch für andere Werte von β durchzuführen, da Beobachtungen der Windgeschwindigkeit kleinere β, und zwar solche bis zu 2,4 ergeben hätten 6).

Daraufhin wurde die Rechnung für $\beta = 3$ durchgeführt, in derselben Weise wie in der in Rede stehenden Arbeit für $\beta = 7$, doch in Anbetracht des Umstandes, daß diese Überlegungen doch nur als mehr oder weniger rohe Annäherung

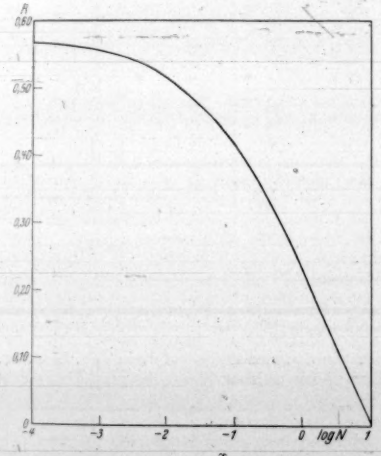


Fig. 2. $R = \log Q + N$; $Q = \int_1^\infty 10^{-N\rho}(\rho^2-1)^{-\frac{3}{4}}\,d\rho$.

an die wirklichen Verhältnisse anzusehen sind, mit geringerer Genauigkeit[1]). Es möge daher auch die Angabe der Abhängigkeit des Integrals

$$Q = \int_1^\infty 10^{-N\rho}(\rho^2-1)^{-\frac{3}{4}}\,d\rho$$

von N in Form einer Kurve Platz finden und zwar nach einer auf den Fall $\beta = 7$ bezüglichen Weisung des Herrn A. Huber mit $\log N$ und $R = \log Q + N$ als Koordinaten (Fig. 2). N hat diesmal die Bedeutung:

$$N = 0{,}434 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varrho\lambda}{A_1}}\, z^{\frac{2}{3}}.$$

Die Ergebnisse der Rechnung, die für diesen Fall bloß unter der einen Annahme $A(10^4) = 50\ \mathrm{cm^{-1}\ g\ sec^{-1}}$ durchgeführt wurde, so daß $A_1 = 0{,}0487\ \mathrm{cm^{-3}\ g\ sec^{-1}}$ zu setzen ist, sind in Tabelle II zusammengestellt.

Um nun den Einfluß der Veränderung des Parameters β auf s^* besser vor Augen führen zu

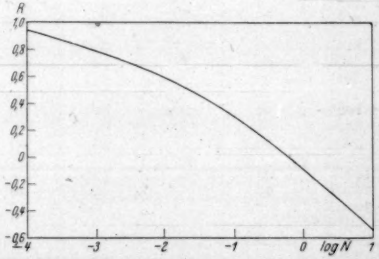


Fig. 3. $R = \log Q + N$; $Q = \int_1^\infty 10^{-N\rho}(\rho^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,d\rho$.

können, wurde noch unter Beibehaltung des Austauschwertes $50\ \mathrm{cm^{-1}\ g\ sec^{-1}}$ in 100 m Höhe die Annahme $\beta = \infty$ durchgerechnet sowie der Grenzfall $\beta = 1$ überdacht[1]).

Für $\beta = \infty$ haben wir

$$Q = \int_1^\infty 10^{-N\rho}(\rho^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,d\rho$$

$$N = 0{,}434 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{\varrho\lambda}{A_1}} \cdot z^{\frac{1}{2}}$$

$$A_1 = 0{,}005\ \mathrm{cm^{-2}\ g\ sec^{-1}}.$$

Die Resultate der Rechnung sind in Tab. II verzeichnet.

Denken wir uns die Größe des Austausches in 100 m Höhe unverändert gleich $50\ \mathrm{cm^{-1}\ g\ sec^{-1}}$ und lassen wir β von ∞ an abnehmen, so treffen wir folgende Verhältnisse: Für $\beta = \infty$ ist nach der eingangs erwähnten Formel (3a), die für diesen Fall in

$$A(z) = A_1 z$$

[1]) Während Huber die Auswertung der Integrale mittels Planimetrierens und Anwendung der Simpsonschen Formel soweit treibt, daß die von ihm für die Enden des Bereichs der Integrationsvariablen gegebenen Näherungsformeln für s_1 gar nicht mehr als Korrekturen verwendet zu werden brauchten, wurde hier die Integration mittels Planimeters nur in einem Bereich durchgeführt, der sich so weit an die Grenzen des Integrationsintervalls heran erstreckte, daß die Korrekturen einen verhältnismäßig nicht allzugroßen Betrag ausmachten.

[1]) ∞ und 1 sind als Grenzen für β anzusehen, kleinere β würden ein Abnehmen des Austausches mit der Höhe ergeben, was der Erfahrung völlig widerspricht.

Tabelle II.

Gehalt s^* in verschiedenen Höhen, ausgedrückt in Hundertteilen desjenigen in 0,01 m Höhe. $A(10^4) = 50\ \mathrm{cm^{-1}\,g\,sec^{-1}}$.

z in m	$\beta = 1$			$\beta = 3$			$\beta = \infty$		
	Ra Em	*Th Em*	*Th B*	*Ra Em*	*Th Em*	*Th B*	*Ra Em*	*Th Em*	*Th B*
0,01	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0,02					97			85	
0,05					89			67	
0,1				98	82	97	82	52	80
0,2		99			74			40	
0,5		97			62			25	
1		95		95	50	91	65	16	60
2		89			36			8,5	
5		76	99		19			2,7	
10		57	98	87	9	76	48	0,8	39
20	99	33	96	82	2,8	69		0,0	
50	96	6,0	90	75	0,2	59			
100	92	0,4	81	69	0,0	49	31		19
200	85	0 0	65	61		39			
500	69		34	49		23			
1000	45		12	38		12	16		4,1
2000	20		1,4	26		4 4			
5000	2,7		0,0	12		6,6			
7000	0,8			7,6		0,2	4,8		0,3

übergeht, der Anstieg von s^* linear, für kleineres β ist der Anstieg für kleine z größer, für große z kleiner, bis schließlich für $\beta = 1$ A bei $z = 0$ von $A = 0$ auf $A = 50$ springt und von dort konstant bleibt (Fig. 4). Für letzteren Fall geht

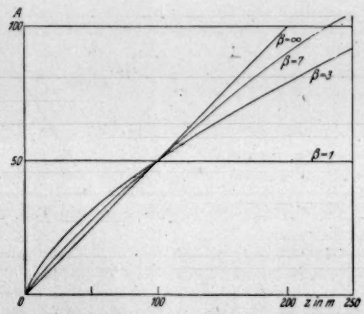


Fig. 4. Austausch $A(z)$ für verschiedene β.

auch Gleichung (1a) in die für höhenunabhängigen Austausch (2) über. Wir werden daher erwarten, daß für gegen 1 abnehmendes β die Gehalte s^* sich denjenigen nähern, die unter Zugrundelegung konstanten Austausches gemäß den Formeln

$$s^* = \frac{s(z)}{s(1)}, \quad s(z) = e^{\sqrt{\frac{\varrho\lambda}{A}}z}, \quad A = 50\ \mathrm{cm^{-1}\,g\,sec^{-1}}$$

berechnet werden und ebenfalls in Tab. II stehen. Daß und in welcher Weise dies geschieht, macht

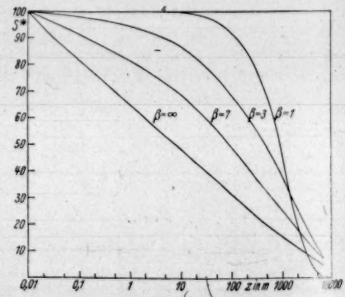


Fig. 5. Gehalte s^* für $A(10^4) = 50\ \mathrm{cm^{-1}\,g\,sec^{-1}}$ und verschiedenes β. Radiumemanation.

uns wohl die Fig. 5 am deutlichsten, in der die Funktion s^* für $\beta = 1, 3, 7$ und ∞ und $A(10^4) = 50$ für Radiumemanation eingetragen sind. Fig. 6 zeigt den Tatbestand für Thoriumemanation und Thorium *B*. Wir entnehmen daraus, etwa aus

Fig. 5, daß für fallendes β der Gehalt s^* von $\beta = \infty$, wo ein in der verwendeten logarithmischen Höhenskala bis in große Höhen nahezu linearer Abfall herrscht, anfangs immer schwächer abnimmt, in mittleren Höhen immer stärker und

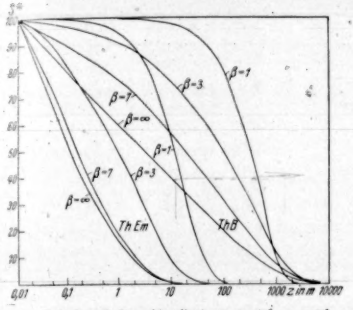


Fig. 6. Gehalte s^* für $A(10^4) = 50\ \mathrm{cm^{-1}\,g\,sec^{-1}}$ und verschiedenes β. Thoriumemanation und Thorium B.

in großen Höhen wieder schwächer abnimmt. In Bodennähe gibt $\beta = 1$, in großen Höhen (wenn die physikalischen Voraussetzungen, die unserer Rechnung zugrunde liegen, dort noch erfüllt wären), $\beta = \infty$ den größten Gehalt s^*. Beachtenswert im Hinblick auf experimentelle Untersuchungen über die vertikale Verteilung der Radiumemanation, ist vielleicht hiebei der Umstand, daß in den für derartige Messungen geeignetsten Höhen $\beta = 1$, also konstanter Austausch das stärkste Gefälle von s^* gibt.

Anknüpfend an die Betrachtungsweise, die wir bei Fig. 1 anwandten, können wir eine der in den beiden zuletzt erwähnten Figuren durch vier ihrer Kurven angedeuteten einparametrigen Scharen als aus der entsprechenden zweiparametrigen Schar (6) hervorgegangen denken, wenn man die beiden Parameter a_1 und β durch die Gleichung

$$a_1 = \frac{\varrho\,\lambda}{A_1},$$

wobei A_1 durch die Bedingung, daß $A(10^4) = A_1\, 10{,}000^{\beta}$ von β abhängt, verbindet.

Mehr um noch einen Beitrag zur Diskussion der Huberschen Lösung der Schmidtschen Differentialgleichung zu geben, als in der Erwartung auf eine Anwendung auf die Wirklichkeit, wurde versucht, die Gehalte für verschiedenes β zu vergleichen unter der Annahme, daß für alle β der Austausch in 0,01 m Höhe der gleiche sei und zwar $0{,}01864\ \mathrm{cm^{-1}\,g\,sec^{-1}}$ (es ist dieser Wert, der bei der Annahme $\beta = 7$ und $A(10^4) = 50$ resultiert). Es sei hiezu bemerkt, daß diesem $A(1)$ für die verschiedenen β die folgenden $A(10^4)$ entsprechen:

$\beta = 1$	$A(10^4) = 0{,}01864\ \mathrm{cm^{-1}\,g\,sec^{-1}}$
3	8,65
7	50,0
∞	186,4 .

Die diesbezüglichen Rechenergebnisse finden wir in Tab. III und den Fig. 7 und 8, die, wenn wir

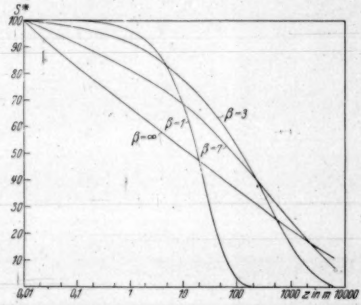


Fig. 7. Gehalte s^* für $A(1) = 0{,}01864\ \mathrm{cm^{-1}\,g\,sec^{-1}}$ und verschiedenes β. Radiumemanation.

es so ausdrücken wollen, geeignet sind, die Kurvenschar (6) für festen Parameter a_1 und variablen Parameter β darzustellen. Wir finden hier dieselben Verhältnisse wie vorhin: größtes s^* in Bodennähe für $\beta = 1$, in der Höhe für $\beta = \infty$, nur stärker ausgeprägt.

Mit der Aufdeckung des Rechenfehlers in der oben zitierten Arbeit bedürfen auch die Angaben

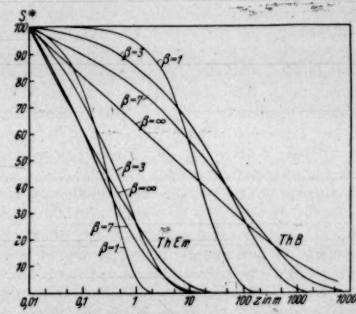


Fig. 8. Gehalte s^* für $A(1) = 0{,}01864\ \mathrm{cm^{-1}\,g\,sec^{-1}}$ und verschiedenes β. Thoriumemanation und Thorium B.

über den Gesamtgehalt der Atmosphäre an radioaktiven Stoffen sowie über die sekundliche Nachfuhr derselben vom Boden her einer Revision.

Tabelle III.

Gehalt s^* in verschiedenen Höhen, ausgedrückt in Hundertteilen desjenigen in 0,01 m Höhe. $A(1) = 0{,}01864\ \mathrm{cm^{-1}\,g\,sec^{-1}}$.

z in m	$\beta = 1$			$\beta = 3$			$\beta = \infty$		
	RaEm	*ThEm*	*ThB*	*RaEm*	*ThEm*	*ThB*	*RaEm*	*ThEm*	*ThB*
0,01	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0,02		97		99	94	99		98	
0,05		89		98	83	97		73	
0,1		77	99	97	73	96	83	61	81
0,2	99	58	98	96	60	93		50	
0,5	98	24	95	94	42	89		37	
1	96	5,6	80	92	27	85	67	27	64
2	93	0,3	58	89	14	80		19	
5	83	0,0	33	84	2,5	72		10	
10	69		11	79	0,4	64	53	4,8	45
20	47		0,4	72	0,0	57		1,9	
50	15		0,0	63		40		1,0	
100	2,4			54		28	37	0,5	26
200	0,1			43		17		0,3	
500	0,0			27		5,0		0,1	
1000				16		1,2	21	0,0	11
2000				7,1		0,1			
5000				1,2		0,0			
7000				0,5			10		2,3

Hiezu bemerken wir zunächst, daß nun eine sinnvolle Berechnung des Gesamtgehalts an Radiumemanation für den Fall $\beta = 7$ wegen des großen Gehaltes in großen Höhen unmöglich wird, wie denn überhaupt dieser Umstand die Annahme $\beta = 7$ oder zum mindesten die angegebene Lösung dieses Falles in ihrer Bedeutung beeinträchtigt, da wir ja geneigt sind, die Stratosphäre als Gebiet geringen Austausches, also verschwindenden Gehalts an radioaktiven Stoffen anzunehmen[1]), im Einklang mit den allerdings spärlichen und nur einige Kilometer hinaufreichenden Ballon- und Flugzeugmessungen 7) über die vertikale Verteilung der Radiumemanation.

Noch ungünstiger stehen die Dinge im Fall $\beta = 3$ und $A(10^4) = 50$. Wir wollen jedoch probeweise den Fall $\beta = 3$ und $A(10^4) = 8{,}65$ (Tab. III) auf den sich aus diesen Annahmen ergebenden Gesamtgehalt prüfen, obwohl auch hiebei noch die Schichten über $z = 7000$ m Merkliches zum Gesamtgehalt ausmachen. Es ergibt durch Integration bis 7000 m fiktiver Höhe bei einer Annahme eines Gehaltes von $130 \cdot 10^{-18}$ curie/ccm in 1 m Höhe über dem Erdboden der Gesamtgehalt einer Luftsäule von 1 qcm Querschnitt an Radiumemanation zu $0{,}8 \cdot 10^{-11}$ curie/qcm. Die Überlegung, daß die sekundliche Nachfuhr aus einem Quadratzentimeter Erdoberfläche gleich der in der darüberbefindlichen Luftsäule zerfallenden Emanationsmenge sein muß, ergibt eine Nachlieferung von rund $2 \cdot 10^{-17}$ curie/qcm · sec, dem die Berechnung von Hess und Schmidt unter Zugrundelegung konstanten Austausches zu $2{,}4 \cdot 10^{-17}$ curie/qcm · sec sowie Beobachtungen von Smyth 8) zu $7{,}4 \cdot 10^{-17}$ curie/qcm · sec gegenüberstehen.

Nun noch einige Worte über die Versuche zur experimentellen Prüfung der Schmidtschen Theorie durch W. Kosmath und E. Schmid in Graz. E. Schmid 9) bestimmt den Emanationsgehalt r_1, r_2 und r_3 in bez. 2 m, 13 m und 50 m Höhe über freiem Feld (am Antennenmast des Rundfunksenders St. Peter bei Graz). Nun ist zu bemerken, daß die Rechnungen in der oben zitierten Arbeit von W. Schmidt ihre Gültigkeit behalten, wenn man $A(10^4)$ anstatt 22,6, 50 und 110,5 gleich 0,226 bzw. 0,5 bzw. 1,105 setzt. Somit können wir die zu erwartenden Werte r_1 für r_2 und r_3, wobei wir den ersten gleich 100 setzen wollen, für die folgenden verschiedenen Austauschwerte in 100 m Höhe zusammenstellen,

1) Die Berücksichtigung dieses Umstandes im Rahmen der vorliegenden Betrachtungen könnte vielleicht dadurch geschehen, daß man die Randbedingung $s(\infty) = 0$ durch eine solche von der Art $s(7 \cdot 10^5) = 0$ ersetzt, wobei dann allerdings die Auswertung der Lösung s_2 (5_2) notwendig wäre.

worunter wir dann die experimentellen Werte E. Schmids setzen:

A (10^4)	2 m	13 m	50 m
0,5	100	58,2	29,3
1,1	100	65,1	38,5
22,6	100	82,0	65,7
50,0	100	85,5	70,9
experimentell:	100	78,1	43,4

Die experimentellen Ergebnisse deuten also, wenn wir bei der Annahme $\beta = 7$ bleiben, auf ein A (10^4) mittlerer Größenordnung hin, vielleicht von etwa 5. Dies steht im Einklange mit der Tatsache, daß das Grazer Becken als Gebiet geringen Austausches, als „Luftsumpf" bekannt ist. Übrigens wäre es ja denkbar, wenn auch praktisch ungemein mühevoll durchzuführen, durch Variation von β die Theorie den Versuchsergebnissen völlig anzupassen.

Die Ergebnisse Kosmaths 10), der in 0,1 m und 11,5 m den Emanationsgehalt bestimmt, würden sich bei Annahme von $\beta = 7$ mit einem A (10^4)-Wert, der etwas geringer ist als 22,6, vertragen:

	0,1 m	11,5 m
A (10^4) = 22,6	100	87,8
experimentell	100	82,0

Hier kann, da nur an zwei Stellen untersucht, gleichzeitig über β und die Größe des Austausches prinzipiell aus den Untersuchungen nichts geschlossen werden. Inwieweit allerdings Kosmaths Befürchtungen, seine Messungen seien, da nicht über völlig freiem Feld ausgeführt, nicht ganz stichhältig, nur durch das schlechte Übereinstimmen mit Schmidts Rechnung hervorgerufen wurden, oder wirklich gerechtfertigt sind, kann hier nicht entschieden werden.

Zusammenfassung.

Auf Grund der Gesetze der ungeordneten Bewegung in freier Luft wurde von V. F. Hess und W. Schmidt unter der Annahme einer höhenunabhängigen Austauschgröße und später von W. Schmidt unter der Annahme eines mit der Höhe zunehmenden Austausches die Höhenverteilung der vom Boden ausgehenden Emanationen und deren Zerfallsprodukte berechnet. Die aus der letzteren Annahme von Schmidt berechnete ungemein rasche Abnahme mit der Höhe schien mit von E. Schmid in Graz durchgeführten Beobachtungen der vertikalen Verteilung der Radiumemanation verträglich zu sein, was aber wegen der abnormen klimatischen Verhältnisse des Grazer Beckens als nicht entscheidend gewertet werden konnte. Es deckte nun eine Durcharbeitung der Rechnungen in der Arbeit von W. Schmidt einen Irrtum auf und eine erneute Durchführung dieser Rechnungen für die Substanzen *RaEm*, *ThEm* und *ThB* ergab eine wesentlich geringere Abnahme mit zunehmender Höhe über dem Erdboden. Ferner wurde die Höhenverteilung unter der Annahme einer anderen Art der Zunahme des Austausches mit der Höhe, die durch die Kennzahl $\beta = 3$ charakterisiert werden kann und sich zwischen die Fälle von Hess und Schmidt und von Schmidt, denen die Kennzahlen $\beta = 1$ und $\beta = 7$ zugeordnet werden können, einreiht, berechnet. Konstanz des Austausches ($\beta = 1$) sowie die beiden betrachteten verschiedenen Arten der Zunahme desselben mit der Höhe ($\beta = 3$ und $\beta = 7$) ergeben unter der Voraussetzung einer bestimmten Größe des Austausches in 100 m Höhe die folgende Verteilung der Radiumemanation in willkürlichen Einheiten:

	$\beta = 1$	$\beta = 3$	$\beta = 7$
0,01 m	100	100	100
0,1 m		98	92
1 m		95	82
10 m		87	69
100 m	92	69	49
1000 m	45	38	25
7 000 m	2,7	12	9,4
13 000 m	0,8	7,6	6,9

Literatur.

1) W. Schmidt, Der Massenaustausch bei der ungeordneten Strömung in freier Luft und seine Folgen. Wien. Sitzber. IIa, **126**, S. 757, 1917.
2) W. Schmidt, Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen. Hamburg 1925.
3) W. Schmidt, Zur Verteilung radioaktiver Stoffe in der freien Luft. Physik. Zeitschr. **27**, S. 371—378 (1926).
4) V. F. Hess und W. Schmidt, Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre. Physik. Zeitschr. **19**, S. 109—114 (1918).
5) W. Schmidt, Der Massenaustausch . . . Hamburg 1925. S. 86 ff.
6) W. Schmidt, Strömungsforschung in freier Luft. Meteorol. Zeitschr. **46**, 495—504, 1929.
7) A. Wigand und F. Wenk, Der Gehalt der Luft an Radium-Emanation nach Messungen bei Flugzeugaufstiegen. Ann. d. Phys. **86**, S. 657 bis 686 (1928).
8) L. B. Smyth, Phil. Mag. (6) **24**, 623, 1912.
9) E. Schmid, Der Gehalt der Freiluft an Radiumemanation und deren vertikale Verteilung in der Nähe des Erdbodens. Wien. Sitzber. IIa, **140**, S. 27—48 (1931).
10) W. Kosmath, Der Gehalt der Freiluft an Radiumemanation und deren vertikale Verteilung in der Nähe des Erdbodens. Gerl. Beitr. z. Geophysik, **25**, S. 95—113 (1930).

Graz, Lehrkanzel für Experimentalphysik, im Juni 1931.

(Eingegangen 17. Juni 1931.)

Messung der Aktivität der radioaktiven Substanzen mittels der Drehwaage.

Von J. Zahradníček.

Die Aktivität der Radiumemanation — etwa 100 Millicurie — und des Radiums — $m_1 = 159$ mg, $m_2 = 42$ mg, $m_3 = 4$ mg — wurde mittels einer empfindlichen adaptierten Drehwaage gemessen. In den früheren Meßmethoden des „Ionenwindes" — Zeleny[1]), Jolly[2]), Przibram[3]), Ratner[4]), Hess[5]) — handelte es sich um Konvektionserscheinungen bei Ionisation durch Röntgenstrahlen, sowie auch durch Strahlen der radioaktiven Substanzen im elektrischen Felde. Die neue Meßmethode unterscheidet sich von den früheren dadurch, daß die benutzte Drehwaage vollständig in Metall eingeschlossen wurde und daß kein Kondensator und kein äußeres elektrisches Feld benützt wurde.

Es wird hier die Drehwaage beschrieben, die sich bei den radioaktiven Messungen gut bewährt hat. Der Apparat ist ganz einfach, so daß er

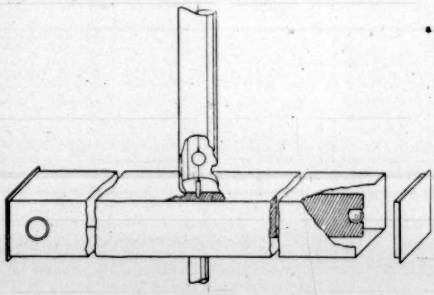


Fig. 1.

leicht in den Institutswerkstätten zusammengestellt werden kann. Die Drehwaage ist eigentlich eine vereinfachte Gravitationswaage. Den Waagekasten bildet ein auf beiden Enden mit metallischen Ansätzen geschlossenes Messingrohr von quadratischem Querschnitt 4×4 cm^2 und von 16 cm Länge, Wandstärke 1 mm. Der Waagebalken besteht aus Aluminiumblech von den Dimensionen 14,5 cm $\times$ 3,47 cm $\times$ 0,4 mm und von der Masse 7,06 g. An seinen Enden sind zwei Bleikugeln von der Masse 1,76 g befestigt, wie aus der Fig. 1 ersichtlich ist. In den Seitenwänden des Waagekastens sind gegenüber den Aluminiumflügeln kreisförmige Fensterchen, 1 bis 2 cm Durchmesser, angeordnet, die mit Aluminiumfolie 0,002 mm Dicke luftdicht verschlossen sind. Um die dünne Aluminiumfolie gegen Durchbruch zu schützen, wurde zuerst das Fensterchen mit dünnem Papier und darauf mit der Aluminiumfolie überzogen. Der Aufhängedraht — aus Platin-Iridium von 0,015 mm Durchmesser und 35 cm Länge — befindet sich in einem vertikalen Rohre von 2,8 cm Durchmesser. Der Torsionskopf ist in 60 Teile geteilt und hat zwei Mikrometerschrauben zum Justieren des Waagebalkens in der symmetrischen Lage. Die Justierung der Waage in der Vertikalen besorgt man mit den Stellschrauben im Stativ. Der Waagebalken ist mit einem Spiegel versehen, entweder für subjektive Messungen mit Fernrohr und Skala, oder für objektive Messungen in Verbindung mit einem autographischen Zylinder.

Die Drehwaage steht auf einer Konsole und muß längere Zeit unarretiert stehen und justiert werden, bis die Gleichgewichtslage des Waagebalkens, der um die Symmetrieachse des Waagekastens schwingen soll, konstant bleibt, was man mit Fernrohr und Skale oder aus dem Autogramme leicht erkennt. Der Gang der Waage wird in bekannter Weise auf einem Streifen Bromsilberpapier, das auf einer Trommel befestigt ist, autographisch registriert. Die Trommel dreht sich in einer Stunde, oder in einem Tage, oder in einer Woche einmal um ihre Achse.

Wenn die Gleichgewichtslage der Drehwaage konstant bleibt, wird das radioaktive Präparat dem Aluminiumfensterchen mittels einer Mikrometerschraube in eine Entfernung von 0, 1, 2, ... 9, 10 mm angebracht. Der Waagebalken wird aus der Nullage abgelenkt und nimmt aperiodisch — die Waage ist stark gedämpft — eine neue Gleichgewichtslage ein, die in der Richtung entgegen der Emission verschoben ist, als wenn es sich da um eine Anziehung handelte. Die Ablenkung der Drehwaage aus der Gleichgewichtslage ist dabei direkt proportional der elektrometrisch gemessenen Aktivität des Präparates, eine Funktion der Zeit und eine Funktion des Abstandes d Präparat-Waage. Dabei wurde der Abstand d zwischen dem Schutzrohr des Präparates und dem Waagefenster gemessen.

Neben den in der vorläufigen Mitteilung[1]) erwähnten Autogrammen seien hier folgende angeführt:

Fig. 2 stellt die zeitliche Abhängigkeit der Waageablenkung, d. i. Abhängigkeit der Kraftwirkung der Radiumemanation und zwar im Laufe von 12 Stunden und im zweiten Falle in

1) Proc. Cambridge Phil. Soc. **10**, 14, 1898.
2) Phil. Mag. **7**, 303, 1904.
3) Ber. d. Wiener Akad. **121** [2a], 225, 1912.
4) C. R. **158**, 565, 1924; Phil. Mag. **32**, 441, 1916.
5) Ber. d. Wien. Akad. **128** [2a], 1029, 1919; **129** [2a], 565, 1920.

1) Zeitschr. f. Phys. **61**, 719, 1930.

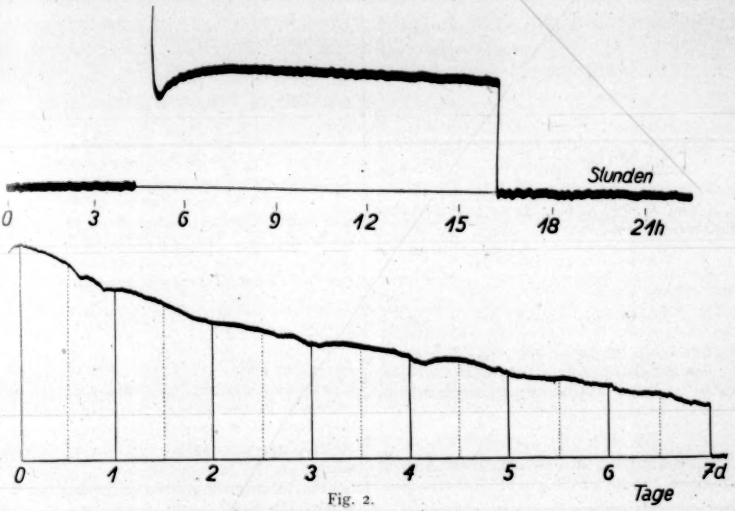


Fig. 2.

sieben Tagen. Im ersten Falle ist das Anwachsen der Radiumemanation in den ersten vier Stunden und die darauf folgende Abnahme der Aktivität gut zu beobachten, im zweiten Falle verläuft die Abnahme der Aktivität nach der Exponentialkurve.

Die Kraftwirkung der Radiumemanation auf die Drehwaage bei dem konstanten Abstande des Präparates von der Waage läßt sich in der Form

$$J = J_0 e^{-\lambda t} = G \Delta n$$

ausdrücken; dabei bedeutet J_0 die Kraftwirkung des Präparates in der Zeit $t = 0$, G die Empfindlichkeit der Waage. Die Konstante J_0 ist von der anfänglichen Menge des Präparates abhängig. Die Konstante λ bedeutet die Zerfallskonstante der Radiumemanation[1]). Die Empfindlichkeit der Drehwaage G hängt einerseits mit der Torsionskonstante des Aufhängefadens

$$D = \Phi \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{l},$$

andererseits mit der Masse und der Form des Waagebalkens, mit der Größe und Masse des Fensterchens und mit dem Abstande desselben von der Drehachse des Waagebalkens zusammen[1]).

Aus dem siebentägigen Autogramme wurden folgende Ablenkungen des Waagebalkens aus der Gleichgewichtslage abgelesen:

Tabelle I.

Zeit		Ablenkung	
t Tage		Δn cm	
0		7,90	
	0,5		7,30
1		6,60	
	1,5		5,90
2		5,30	
	2,5		4,90
3		4,40	
	3,5		4,20
4		3,70	
	4,5		3,40
5		3,20	
	5,5		2,90
6		2,70	
	6,5		2,40
7		2,10	

Aus diesen Messungen kann die Zerfallskonstante λ bestimmt werden: Aus den Beziehungen

$$J = J_0 e^{-\lambda t} = G \Delta n$$

1) Wählen wir die bekannte Bezeichnung: λ die Zerfallskonstante, T die Halbwertszeit, τ die mittlere Lebensdauer, dann ist für die Radiumemanation $T = 3{,}825\ d$, $\lambda = 2{,}097 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{sec}^{-1} = 0{,}1812\ d^{-1}$, $\tau = 3{,}818\ d$

und für das Radium

$T = 1580\ a$, $\lambda = 1{,}39 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{sec}^{-1} = 4{,}38 \cdot 10^{-4}\ a^{-1}$, $\tau = 2280\ a$.

(K. W. F. Kohlrausch, Radioaktivität, S. 744, 741, Leipzig 1928-Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik 15.)

1) Mittels der Newtonschen Kraft gemessen, ist die Empfindlichkeit der benützten Drehwaage $4{,}51 \cdot 10^{-7}$ dyn/gram für 1 cm Ablenkung bei 1 m Entfernung Spiegel-Skala.

folgt nämlich für die in den Zeiten t_1, $t_2 > t_1$ herrschenden Ablenkungen

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = e^{\lambda (t_2 - t_1)},$$

oder

$$\lambda = \frac{1}{(t_2 - t_1) \lg e} (\lg \Delta n_1 - \lg \Delta n_2).$$

Aus der ersten Messungsreihe folgt für $t_1 = 0$, 1, 2, 3 und $t_2 = 4$, 5, 6, 7 Tage der Wert der Zerfallskonstante

$$\lambda = (0{,}181_0 \pm 0{,}004)\ d^{-1},$$

aus der zweiten Reihe

$$\lambda = (0{,}180_4 \pm 0{,}004)\ d^{-1}.$$

Es sei noch bemerkt, daß zur Bestimmung von λ die Beziehung für die durch die Exponentialkurve begrenzte Fläche benützt werden kann. Aus der Gleichung

$$y = Ce^{-\lambda t}$$

folgt nämlich für die zwischen den Abszissen t_0, t_n enthaltene Fläche

$$f = \int_{t_0}^{t_n} y\, dt = \frac{1}{\lambda} (y_0 - y_n)$$

und daraus

$$\lambda = \frac{y_0 - y_n}{f}.$$

Wenn wir nun auf irgendeine Art die Fläche f bestimmen, z. B. mittels der in dem Autogramme angedeuteten Trapeze, dann folgt für die Fläche

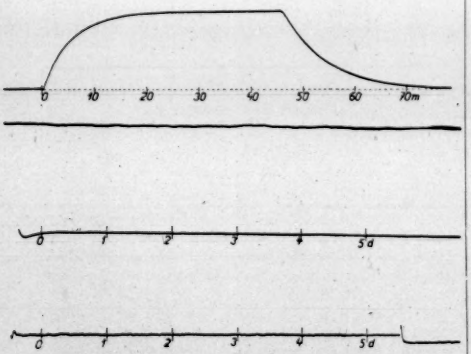


Fig. 3.

$f = 30{,}90$ bzw. $26{,}15$, für die zugehörige Ordinatendifferenz $y_0 - y_n = 5{,}80$ bzw. $4{,}90$ und daraus für den Wert der Zerfallskonstante

$$\lambda = 0{,}187_7 \text{ bzw. } 0{,}187_4\ d^{-1}.$$

Diese Werte sind um 3 Proz. größer, als die elektrometrisch gemessenen; das hängt damit zusammen, daß die Fläche f auf die genannte Art etwas kleiner berechnet wurde. Wegen der von Zeit zu Zeit ausgeführten Kontrolle der ganzen Apparatur entstehen nämlich im Gange der Waage einige damit verbundene Störungen; auch der Gang des siebentägigen autographischen Zylinders war nicht störungsfrei.

Die zeitliche Abhängigkeit der Kraftwirkung von Radium ($m = 159{,}1$ mg) ist in der Fig. 3 wiedergegeben. Die Ablenkung ist konstant, von der Zeit unabhängig, wegen des zu kleinen Wertes der Zerfallskonstante; es ist nämlich

$$\frac{\lambda_{Ra}}{\lambda_{Em}} = 6{,}7 \cdot 10^{-6}.$$

Im ersten Falle — Fig. 3 — war die Zeit einer Umdrehung des autographischen Zylinders 104 Minuten, in den anderen Fällen 7 Tage. Beim Annähern des Präparates zur Waage nimmt die Ablenkung aperiodisch zu, beim Entfernen wieder ab.

Das Abnehmen der Kraftwirkung der radioaktiven Präparate auf die Drehwaage wurde einerseits subjektiv, mit Fernrohr und Skala gemessen, andererseits autographisch registriert. In diesem Falle wurden die radioaktiven Präparate von $RaCl_2$ in der Menge von $m_1 = 159{,}1$ mg, bzw. $m_2 = 42{,}04$ mg bzw. $m_3 = 3{,}90$ mg benützt. Die feinen Kristalle des radioaktiven Salzes waren dabei in zwei Glasröhrchen aufbewahrt. Das Röhrchen — von äußerem Durchmesser von 2 cm — wurde der Waage in Abständen von 0, 1, ... 9, 10 mm von dem Waagekasten mittels einer Mikrometerschraube angebracht. Der Stand der Waage wurde immer nach einer Stunde nach Einstellen des Präparates abgelesen und autographisch registriert, indem die photographische Kammer auf fünf Minuten geöffnet wurde. Eine Messungsreihe ist in der folgenden Tabelle enthalten; der Abstand Spiegel-Skala war dabei 150 cm.

Das Abnehmen der Kraftwirkung auf die Drehwaage mit dem Abstand des radioaktiven Präparates läßt sich in erster Annäherung in der Form

$$J = J_0 e^{-\mu d},\ J = G\Delta n$$

ausdrücken. Dabei bedeutet die Konstante J_0 die Intensität der Kraftwirkung für den Abstand $d = 0$. Diese Konstante hängt mit der Aktivität des Präparates zusammen. Der Abstand d wird zwischen dem Fensterchen der Waage und der Schutzröhre des Präparates gemessen; es ist also in der Konstante J_0 auch die Absorption der Kraftwirkung im Waagekasten — in der Wand des Waagekastens — enthalten.

Tabelle II.

Abstand d_{mm}	Ablenkung n_{cm}	$\Delta n_k/\Delta n_{k+1}$
0	30,34	
		1,40
1	21,64	
		1,39
2	15,57	
		1,34
3	11,60	
		1,29
4	8,95	
		1,26
5	7,11	
		1,25
6	5,69	
		1,24
7	4,57	
		1,32
8	3,44	
		1,27
9	2,70	
		1,26
10	2,15	

Durch die oben angeführte Form der Funktion für J wird ausgedrückt, daß die gemessene Größe eine Strahlungsart ist. Die α- und β-Strahlen sind dabei durch die Glaswände des Präparatenrohres absorbiert; das radioaktive Präparat ist in zwei Röhren von der Glasdicke je 1 mm enthalten. Die Kraftwirkung des Präparates auf die Waage wird beim Durchgange durch die Luftschicht von der Dicke d stark absorbiert, wie aus der Tab. II ersichtlich ist.

Tabelle III.

d_{mm}	Platinfolie $d_1 = 0{,}0025$ mm		Aluminiumfolie $d_2 = 0{,}065$ mm	
	Δn_{cm}	$\Delta n_k/\Delta n_{k+1}$	Δn_{cm}	$\Delta n_k/\Delta n_{k+1}$
0	15,75		6,40	
		1,35		1,23
1	11,67		5,19	
		1,30		1,22
2	8,98		4,22	
		1,28		1,24
3	7,00		3,41	
		1,24		1,22
4	5,67		2,81	
		1,22		1,21
5	4,67		2,33	
		1,23		1,21
6	3,78		1,92	
		1,22		1,22
7	3,11		1,57	
		1,18		1,20
8	2,64		1,31	
		1,22		1,20
9	2,16		1,09	
		Mittel 1,24		1,21
10			0,90	
				Mittel 1,22

Den Absorptionskoeffizient μ kann man aus den obigen Messungen folgendermaßen bestimmen: aus der Beziehung

$$J = J_0 e^{-\mu d} = G\Delta n,$$

wo Δn die Ablenkung aus der Gleichgewichtslage bedeutet, folgt für zwei in verschiedenen Abständen d_1, d_2 ausgeführte Messungen

$$e^{\mu(d_2 - d_1)} = \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2},$$

und daraus weiter

$$\mu = \frac{1}{(d_2 - d_1)\lg e}(\lg \Delta n_1 - \lg \Delta n_2).$$

Diese für parallele Strahlenbänder geltende Formel gilt in unserem Falle nur näherungweise. Als Mittel der letzten sieben Messungen (Tab. II) folgt für den Absorptionskoeffizient der Luft der Wert

$$\mu = 0{,}239\ \text{cm}^{-1}.$$

In der folgenden Tab. III und in der Fig. 4 sind die Messungen für die Fälle angeführt, wann zwischen dem Präparate und dem Waagefenster

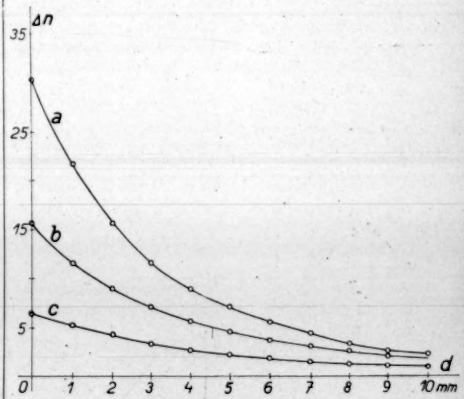


Fig. 4.

eine Platinfolie von der Dicke $d_1 = 0{,}0025$ mm und in dem anderen Falle eine Aluminiumfolie von der Dicke $d_2 = 0{,}065$ mm sich befand. Das Präparat wurde wieder in die Abstände $d = 0, 1, 2 \ldots 9, 10$ mm angebracht.

In dem Diagramme — Fig. 4 — ist der erste Fall — Luft — durch die Kurve *a*, die zwei anderen — Platinfolie und Aluminiumfolie — durch die Kurven *b* und *c* dargestellt.

Wenn wir die Absorptionskoeffizienten für Platin mit μ_1 und für Aluminium mit μ_2 bezeichnen, dann gelten in der ersten Annäherung

die Beziehungen

$$J_a = J_0 e^{-\mu d}, \; J_b = J_0 e^{-(\mu d + \mu_1 d_1)},$$

$$J_c = J_0 e^{-(\mu d + \mu_2 d_2)}$$

und

$$J = G \Delta n.$$

Bei demselben Abstand des Präparates von der Waage sind die Kraftwirkungen durch die Beziehung

$$J_a : J_b : J_c = 1 : e^{\mu_1 d_1} : e^{\mu_2 d_2} = \Delta n_a : \Delta n_b : \Delta n_c$$

gebunden. Die Verhältnisse $\Delta n_a : \Delta n_b : \Delta n_c$ sollten bei gleichen Abständen d konstant bleiben, was aber in Wirklichkeit nicht der Fall ist; die Verhältnisse haben in unserem Falle folgende Werte:

$$\begin{aligned} &1 : 0{,}519 : 0{,}211, \\ &1 : 0{,}536 : 0{,}240, \\ &\quad\cdot \\ &\quad\cdot \\ &\quad\cdot \\ &1 : 0{,}77 \; : 0{,}38 \; , \\ &1 : 0{,}80 \; : 0{,}40 \; . \end{aligned}$$

Wie es schon oben erwähnt wurde, gelten die obigen Beziehungen

$$J = J_0 e^{-\mu d} = G \Delta n$$

nur in der ersten Annäherung; für die Koeffizienten μ_1 und μ_2 folgen daraus die Grenzwerte

$$\mu_1 = 2{,}62 \cdot 10^3 \ldots\ldots\ldots 8{,}92 \cdot 10^2 \, \mathrm{cm}^{-1},$$
$$\mu_2 = 2{,}40 \cdot 10^2 \ldots\ldots\ldots 1{,}40 \cdot 10^2 \, \mathrm{cm}^{-1}.$$

Bei strengeren Messungen wäre es notwendig, das radioaktive Präparat in ein kleines Kugelgefäß oder an eine Kreisplatte gleichmäßig verteilt zu geben, um die Strahlenbänder genau berechnen zu können.

Zum Schluß spreche ich dem Vorstand des pharmakologischen Instituts und der radiologischen Station der Masaryk-Universität, Herrn Prof. Dr. Bohuslav Bouček, der unserem Institute die radioaktiven Präparate mit der größten Bereitwilligkeit zur Verfügung stellte, meinen herzlichsten Dank aus.

Zusammenfassung.

Die radioaktiven Substanzen — das Radium, die Radiumemanation — werden mittels einer Drehwaage gemessen. Den Flügeln einer empfindlichen adaptierten Gravitationswaage gegenüber, werden radioaktive Präparate — Emanation in verschlossenen Glasröhrchen etwa 100 Millicurie, Radium in doppelten Glasröhren 160 mg, 42 mg, 4 mg — angebracht, die auf den Flügeln der Drehwaage durch eine dünne Aluminiumfolie hindurch eine Art Anziehung hervorrufen. Von den früheren Meßmethoden des „Ionenwindes" unterscheidet sich die neue Methode dadurch, daß die benutzte Drehwaage vollständig in Metall eingeschlossen ist und daß kein Kondensator und kein äußeres elektrisches Feld benutzt wird.

Die Ablenkung der Waage — mit Fernrohr gemessen oder auf photographischem Wege autographiert — ist direkt proportional der elektrometrisch gemessenen Aktivität des Präparates und eine Funktion des Abstandes Präparat-Waage bzw. bei kurzlebigen Substanzen auch der Zeit. In der ersten Annäherung kann man die Kraftwirkung des radioaktiven Präparates auf die Drehwaage in der Form

$$J = J_0 e^{-(\lambda t + \mu d)} = G \Delta n$$

ausdrücken, wo J_0 die Kraftwirkung für die Zeit $t = 0$ und den Abstand $d = 0$, λ die Zerfallskonstante des radioaktiven Stoffes, μ den Schwächungskoeffizienten des Mediums, G die Empfindlichkeit der Waage, Δn die Ablenkung derselben aus der Gleichgewichtslage bedeuten. In dem Faktor J_0 ist zugleich die Absorption der Kraftwirkung im Waagekasten enthalten. Der Abstand d des Präparates von der Waage wird vom Waagekasten zum Glasrohr, in dem das Präparat aufbewahrt wird, gemessen.

Die radioaktiven Substanzen mit kurzer Lebensdauer — Radiumemanation — kann man mittels der Drehwaage bei konstanter Entfernung auf die Abhängigkeit der Kraftwirkung von der Zeit, die langlebigen Produkte — Radium — wieder auf die Abhängigkeit der Kraftwirkung von der Entfernung messen. Im ersten Falle kann man aus der Ablenkung der Waage die Zerfallskonstante λ, im zweiten Falle den Schwächungskoeffizienten μ berechnen.

Die Dimensionen der benutzten Drehwaage und einige mittels derselben ausgeführten Autogramme und Messungen werden mitgeteilt[1]).

1) Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Fakultät der Masaryk-Universität Nr. 138, Brünn 1931.

Brünn, Physikalisches Institut der Masaryk-Universität.

(Eingegangen Mai 1931.)

Eine neue Erscheinung beim Durchgang eines Elektronenbündels durch Blenden.

Von W. Seitz und G. Harig.

In einer früheren Arbeit[1]) haben wir ein merkwürdiges Phänomen, das bei der Bestrahlung photographischer Platten durch Elektronen mittlerer Geschwindigkeit auftritt, beschrieben. Dieses Phänomen, das schon M. Nacken[2]) beobachtet hatte, besteht in folgendem:

Ein nahezu paralleles Elektronenbündel durchsetzt eine Reihe von Blenden und trifft auf eine photographische Platte (Agfa Kontrast-Platte). In den geschwärzten Flächen erscheint im allgemeinen in der Mitte ein dunkler Kern, der unter bestimmten Verhältnissen eine deutliche Struktur zeigt. Die

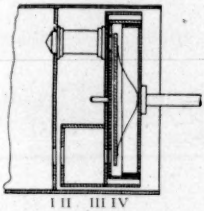


Fig. 1.

Erscheinung ist vollständig sicher reproduzierbar. Außerdem treten bei sehr starker Bestrahlung an den Rändern der geschwärzten Fläche sehr dunkle fransenartige Streifen auf. Sie entstehen durch eine Wechselwirkung zwischen der bestrahlten photographischen Schicht und der darauf liegenden metallischen Blende, denn wenn diese Blende größer ist als das geschwärzte Feld, wenn also der Elektronenstrahl durch entferntere Blenden auf einen kleinen Querschnitt als den der anliegenden Blende gebracht ist, so treten diese Fransen nicht auf. Im folgenden wurde diese Erscheinung, die vermutlich auf elektrische Ströme zurückzuführen ist, nicht weiter untersucht.

Zur Prüfung der Bedingungen, unter denen die besprochenen Kerne auftreten, wurde die Apparatur und Meßmethode verwendet, die in den genannten Arbeiten[1])[2])[3]) beschrieben ist. Das Elektronenbündel passierte zuerst zwei spaltförmige Blenden von den Dimensionen 1 × 4 mm, trat dann nach einem Weg von 340 mm durch eine Blende I von 5 × 12,6 mm und nach einem weiteren Weg von 3 mm durch eine Blende II von 8 × 18,5 mm in den 20 mm tiefen Auffangzylinder ein (vgl. Fig. 1). Es durchsetzte schließlich die Blende III im Boden des Zylinders und die unmittelbar dahinter liegende Blende IV. Diese ist in den Kassettendeckel eingeschnitten und liegt auf der Schicht der photographischen Platte auf. Blende III und IV wurden nach Größe und Gestalt vielfach verändert. Blende I ist stets von dem Elektronenbündel vollständig ausgefüllt.

Die naheliegende Vermutung, es könnten die Kerne durch Lichtstrahlen, die auf irgendwelchen Wegen von der Glühkathode zur Platte gelangen, erzeugt werden, war leicht zu widerlegen. Ein Glimmerblatt, das hinter Blende IV auf die photographische Schicht gelegt wurde, verhinderte das Auftreten jeglicher Schwärzung.

Die wichtigste Frage, die entschieden werden mußte, war folgende:

Entstehen die Kerne durch räumlich ungleichmäßige Bestrahlung, enthält also bereits das Elektronenbündel einen dünnen, zentral verlaufenden Strahl erhöhter Wirksamkeit, oder wird die ganze exponierte Fläche im wesentlichen gleichmäßig bestrahlt und ist die Ursache für das Auftreten der Kerne somit in einem besonderen Verhalten der photographischen Schicht gegenüber Elektronen zu suchen, z. B. in ungleichmäßiger elektrischer Aufladung oder in Erwärmung? (siehe auch die Vermutungen von K. Przibram[1]).

Für eine Entscheidung der Frage in dem Sinne, daß die räumliche Inhomogenität des Elektronenbündels selbst die Ursache ist, spricht schon die Tatsache, daß die Form der Kerne nicht allein durch die Gestalt und Größe der Blende IV, die auf der Platte liegt, oder durch die Gestalt der geschwärzten Fläche selbst bestimmt ist, sondern

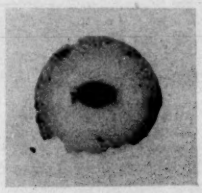


Fig. 2.

auch durch das längliche Rechteck der entfernteren Blende I. Wenn z. B. die Blenden III und IV kreisförmige Löcher von 4,8 mm und 5 mm Durchmesser sind, so hat der Kern doch ellipsenförmige Gestalt, wobei die längere Achse in die Richtung der Längsseite der Blende I fällt (siehe Fig. 2). Der Kern zeigt außerdem deutlich ein-

[1]) W. Seitz und G. Harig, Physik. Zeitschr. **30**, 758, 1929.
[2]) M. Nacken, Physik. Zeitschr. **31**, 296, 1930.
[3]) W. Seitz und G. Harig, Phot. Korr. **66**, 225, 1930.

[1]) K. Przibram, Sitz.-Ber. Akad. Wien Abt. IIa **139**, 106, 1930.

gezeichnete kreuzförmige Struktur, wobei die Kreuzbalken parallel zu den Seiten der Blende I liegen[1]).

Einen einwandfreien Beweis dafür, daß die Kerne nicht auf ein besonderes Verhalten der photographischen Schicht zurückzuführen sind, sondern auf Inhomogenität des Elektronenbündels konnten wir in folgender Weise bringen:

Statt die photographische Platte der Elektronenbestrahlung auszusetzen, haben wir auf

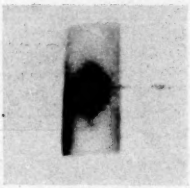


Fig. 3.

diese einen für Elektronen undurchlässigen Fluoreszenzschirm gelegt. Am besten eignete sich ein dünnes Glimmerblatt, das auf der Vorderseite mit Vakuumhahnfett sehr gleichmäßig bestrichen war. Eine kleine Menge des Fettes wurde in

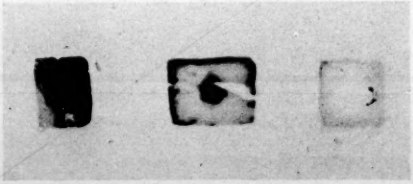


Fig. 4.

Fig. 5.

Benzin gelöst und ein Tropfen dieser Lösung auf dem Glimmerblatt eingedampft. Da das Fett offenbar bei Elektronenbestrahlung stark fluoresziert, erhält man schon bei relativ kurzer Exposition auf der hinter dem Glimmer liegenden photographischen Platte eine kräftige Schwärzung, die die Kerne ähnlich wie nach direkter

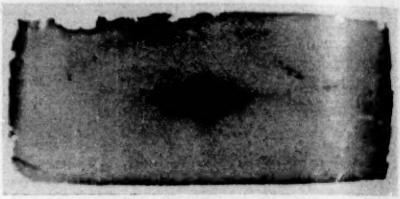


Fig. 6.

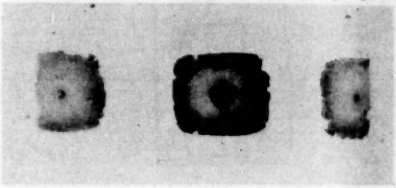


Fig. 7.

Bestrahlung nur etwas weniger scharf zeigt. Fig. 3, 4 und 5 sind auf diese Weise hergestellt. Man vergleiche damit die Fig. 8, 7 und 6, die durch direkte Elektronenbestrahlung gewonnen wurden. Den gleichen Effekt erzielt man, wenn man das Fett auf die photographische Schicht selbst aufträgt. Es muß dann vor dem Entwickeln mit Benzin entfernt werden. Da die Kerne also auch auf dem Umweg über die

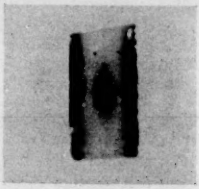


Fig. 8.

Fluoreszenz entstehen, können sie nicht auf irgend welchen besonderen Vorgängen in der photographischen Platte beruhen. Trotzdem ist, wie weiter unten bewiesen werden soll, die Größe und Gestalt der Blenden III und IV ebenfalls maßgebend für das Aussehen der Kerne.

Zunächst wurde untersucht, welche Kathoden-

1) Die Fig. 2 bis 17 sind im Verhältnis 1 : 4,56 vergrößert. Um die Einzelheiten möglichst deutlich hervortreten zu lassen, wurden die Bilder absichtlich auf hart arbeitendem Papier kopiert. Sie sind daher kontrastreicher als die Originalplatten.

spannung am geeignetsten zur Gewinnung kontrastreicher Kerne ist. Die Elektronendichte i, das ist der im Auffangzylinder gemessene Strom dividiert durch die Fläche der Blende I, betrug bei diesen Versuchen stets $4{,}45 \cdot 10^{-9}$ Amp./cm², die Expositionsdauer t 100 sec. Blende III war ein rechteckiges Loch $1{,}8 \times 2{,}2$ mm, Blende IV ebenfalls rechteckig mit den Seitenlängen $2 \times 2{,}4$ mm. Bei 2000 Volt Kathodenspannung sind die Kerne nur schwach, bei 4000 Volt sehr kräftig (Fig. 9) und bei 8000 Volt heben sie sich kaum

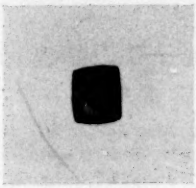


Fig. 9.

noch vom Untergrund ab. Bei allen übrigen Versuchen wurde 4000 Volt als Kathodenspannung gewählt. Nach dieser Frage wurde geprüft, wie die Deutlichkeit der Kerne von der Elektronendichte i abhängt, wenn das Produkt aus Expositionszeit t und Elektronendichte i konstant gehalten wird. Sowohl von M. Nacken wie von uns beiden war früher nachgewiesen worden, daß die Schwärzung durch Elektronenstrahlen allein durch das Produkt $(i \cdot t)$ bestimmt ist, auch wenn i und dementsprechend t in weiten Grenzen variiert werden. Das gilt offenbar nur, wenn i so klein ist, daß die Kerne nur schwach sind. Bei einer Kathodenspannung von 4000 Volt und dem konstanten Wert $(i \cdot t) = 4{,}45 \cdot 10^{-7}$ Amp. sec/cm² wurde t von 33 bis 1500 sec und dementsprechend i von $1{,}35 \cdot 10^{-8}$ bis $0{,}0297 \cdot 10^{-8}$ Amp./cm² variiert. Für $i = 0{,}0297 \cdot 10^{-8}$ Amp./cm² bis $i = 0{,}0594 \cdot 10^{-8}$ Amp./cm² ist der Kern kaum wahrnehmbar, wird jedoch bei $i = 0{,}1485 \cdot 10^{-8}$ Amp./cm² gut sichtbar und nimmt bei weiterer Steigerung der Elektronendichte langsam an Deutlichkeit zu. Die Schwärzung im Kern bzw. im ihn umgebenden exponierten Feld wurde mit einem Registriermikrophotometer der Firma Krüss ausgemessen. Während für die kleinsten Werte von i und größten von t die Schwärzung des Feldes ungefähr 97 Proz. der Schwärzung des Kernes betrug, sank diese Zahl bei den größten verwendeten Werten von i und den kleinsten von t auf 79 Proz. Es nimmt aber nicht etwa die Kernschwärzung mit wachsendem i zu und bleibt die Feldschwärzung konstant, wie man vielleicht erwarten möchte, sondern im Gegenteil sinkt die Feldschwärzung mit wachsendem i anfangs schnell, später langsamer, während die Kernschwärzung nahezu konstant bleibt oder ebenfalls, aber nur sehr schwach, abnimmt. Für die Kerne, nicht aber für das übrige Feld gilt also auch bei diesen Elektronendichten das Bunsen-Roscoesche Gesetz mit großer Annäherung.

Die meisten Aufnahmen, die wir machten, dienten zur Untersuchung der Frage: Wie hängt die Gestalt und Struktur des Kernes von der Art der einzelnen Blenden ab?

Blende I, ein Rechteck $5 \times 12{,}8$ mm, ebenso die weitere Blende II bleiben bei allen Versuchen ungeändert, während Blende III und IV vielfach variiert wurden. Blende IV ist, wie oben gesagt, aus dem Deckel der kreisförmigen Dose, die die Platte enthält, ausgeschnitten. Durch Drehen der Dose im Vakuum konnten 4 bzw. 6 bzw. 8 Aufnahmen mit verschiedenen Blenden IV gemacht werden, ohne daß der Apparat geöffnet werden mußte.

Bei der Aufnahme Fig. 6 bestanden Blenden III und IV aus kreisrunden Löchern von 20 mm Durchmesser. Die rechteckige Gestalt des geschwärzten Feldes entspricht der Blende I. Über die genauen quantitativen Größenverhältnisse soll später gesprochen werden. Der Kern bildet ein erstaunlich scharf gezeichnetes Kreuz, das zentral im Felde liegt und dessen Balken den Seiten des Rechtecks parallel verlaufen. Es wurde dann zwischen die rechteckige Blende II und die gleichen kreisförmigen Blenden III und IV in der Mitte des Auffangzylinders eine kreisförmige Blende II′ von 4 mm Durchmesser eingesetzt.

Fig. 10.

Dadurch verschwand die Kreuzgestalt des Kernes vollständig (Fig. 10). Auf diesem Bild ist der Kern ganz unscharf, die Richtung der Längsseite der Blende I ist jedoch noch angedeutet. Die Blende II′ fehlt bei allen weiteren Aufnahmen. Traten an die Stelle des kreisförmigen Loches von Blende IV drei rechteckige Öffnungen von den Dimensionen $3 \times 2{,}8$ mm, so zeigen sich beachtenswerterweise in allen drei Feldern Kerne

(Fig. 7). Im mittleren ist noch die Kreuzform angedeutet, in den seitlichen, die offenbar von weniger direkten Elektronenbündeln getroffen worden und daher schwächer geschwärzt sind, erscheinen die Kerne weniger deutlich. Obwohl die beiden seitlichen Felder teilweise durch Blende I abgeschnitten sind, liegen auch hier die Kerne in der Mitte der rechteckigen Öffnungen nicht in der Mitte der bestrahlten Felder.

Die Frage, welche Wirkung eine Unterteilung der Blende IV hat, wurde auch noch in anderer Art geprüft. In die Blende IV wurde ein 0,16 mm

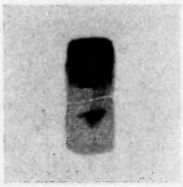


Fig. 11.

dicker Kupferdraht, der die photographische Platte gerade nicht mehr berührte, annähernd symmetrisch eingelötet. Im Fall der Fig. 11 war Blende IV ungefähr rechteckig, der Draht parallel der Schmalseite gespannt, im Fall der Fig. 12 lief der Draht parallel der Längsseite des Rechteckes, und im Fall der Fig. 13 wurde ein kreisförmiges Loch vom Durchmesser 5 mm von dem Draht überbrückt. Die Wirkung des Drahtes ist ganz unerwartet und vorerst kaum

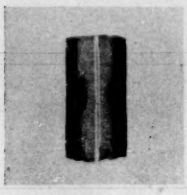


Fig. 12.

Fig. 13.

zu deuten. Der Kern wird von dem Drahtschatten nicht einfach durchschnitten, sondern es entstehen statt des ursprünglichen Kernes zwei neue, die nach außen verschoben sind, wie ein Vergleich der Fig. 11 und 13 mit den Fig. 17 und 2 deutlich beweist. In manchen Fällen zeigt der Drahtschatten eine erstaunlich scharf gezeichnete Struktur. Man beachte z. B. die feine dunkle Linie, die bei Fig. 12 im Inneren des Drahtschattens verläuft, oder Fig. 13, in der dieselbe Linie auf die Breite des ganzen Drahtschattens erweitert ist und ganz erheblich stärkere Schwärzung zeigt als das übrige Feld.

Wenn man den Draht statt in Blende IV in Blende II ausspannt (siehe Fig. 14, wo im übrigen

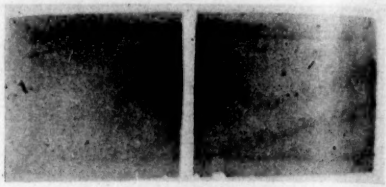


Fig. 14.

dieselbe Anordnung herrscht wie bei Fig. 6), so erhält man einen scharf gezeichneten Schatten, der das geschwärzte Feld durchzieht und die betreffenden Teile des Kernes bedeckt, ohne aus diesem zwei neue zu bilden. Die Kernform, sonst bei dieser Anordnung (Fig. 6) ein Kreuz, wird durch den Draht allerdings verändert.

Bei den folgenden Versuchen wurde als Blende III und IV ebenfalls wie bei Fig. 6 je ein kreisförmiges Loch vom Durchmesser 20 mm gewählt, und das Elektronenbündel war wieder

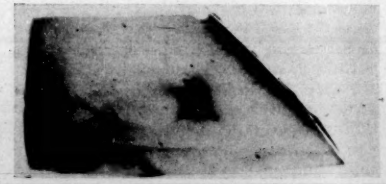


Fig. 15.

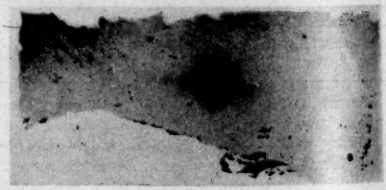


Fig. 16.

nur durch die rechteckige Blende I begrenzt. Jetzt wurde untersucht, wie sich das Bild gestaltet, wenn ein Stück der photographischen Platte fehlt. Unter schiefem Winkel zu den Seiten des Rechtecks, das bestrahlt wird, war von der

Platte ein Segment abgeschnitten (Fig. 15) oder ein entsprechendes Stück der photographischen Schicht abgekratzt worden (Fig. 16). Die Kerne zeigen noch Kreuzgestalt, sind aber etwas deformiert und vor allem verdreht und von der Schnittkante weg verschoben. Es ist dasselbe, ob das

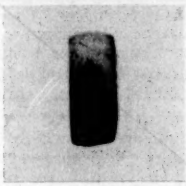


Fig. 17.

Segment mit dem Glas fehlt, oder nur die photographische Schicht. Während alle im Vorhergehenden beschriebenen Erscheinungen sehr sicher reproduzierbar sind, hängen diese Veränderungen der Bilder, wie es scheint, mehr von Zufälligkeiten ab.

Der Gedanke lag nahe, es könnte die Ableitung der elektrischen Ladung oder der von den auftreffenden Elektronen erzeugten Wärme durch das Metall der Blende IV, das auf der photographischen Schicht auflag, von maßgebendem Einfluß sein. Deshalb wurde bei einigen Aufnahmen zwischen den Dosendeckel und die Platte ein Zelluloidblatt eingelegt. In dieses Blatt waren Löcher eingeschnitten worden, die etwas kleiner waren als die entsprechenden der Blende IV. Die Kerne wurden dadurch nicht wesentlich verändert.

Die Frage, ob das Bild durch die Berührung der Schicht mit der metallischen Blende IV beeinflußt wird, wurde weiter dadurch geprüft, daß einmal Blende IV enger als Blende III, ein andermal Blende IV weiter als Blende III gemacht wurde. Im zweiten Fall ist dann die geschwärzte Fläche kleiner als Blende IV. Die Kerne sind unter beiden Bedingungen gleich. Nur die Schwärzung am Rande der Fläche ist vertieft, wenn hier die Schicht von Blende IV berührt wird, d. h. wenn Blende IV enger ist als Blende III. Dies beweist sehr schön u. a. Fig. 8. Blende IV war erheblich länger als Blende III, aber etwas schmäler. Das geschwärzte Rechteck berührt also nur an den Längsseiten das Metall der Blende IV. Hier beobachtet man eine auffallende Verstärkung der Schwärzung, die dagegen an den Schmalseiten fehlt.

Schließlich soll noch hervorgehoben werden, daß offenbar die Güte des Vakuums unter allen Versuchsbedingungen ohne irgendwelchen Einfluß auf Gestalt und Intensität der Kerne ist; denn wie gesagt sind diese sehr sicher reproduzierbar, während selbstverständlich die Güte des Vakuums in weiten Grenzen wechselt.

Eine Erklärung für die beschriebenen Erscheinungen zu geben, scheint noch verfrüht. Mit Sicherheit kann behauptet werden, daß es sich nicht um ein reines Plattenphänomen handelt, daß die Ursachen für das Auftreten der Kerne im Elektronenbündel beim Durchgang durch die Blenden mindestens vorbedingt sind.

Zum Schluß muß noch folgendes erwähnt werden:

Wenn zwischen der rechteckigen Blende I von der Größe $5 \times 12{,}6$ mm und der photographischen Platte sich nur Blenden von erheblich größerem Ausmaß befinden, so sollte, wie zu erwarten wäre, die Größe der rechteckigen geschwärzten Fläche einfach aus den numerischen Verhältnissen zu berechnen sein. Die Entfernung zwischen der ersten engen Blende, die die Elektronen in der Nähe der Kathode zu passieren haben, und der photographischen Platte betrug 350 mm, der Abstand zwischen der Platte und Blende I 23 mm. Also müßten sich die Dimensionen des Bildes ergeben zu:

$$5\,\frac{350}{327} = 5{,}35 \text{ mm und } 12{,}6\,\frac{350}{327} = 13{,}5 \text{ mm}.$$

In Wirklichkeit waren sie aber $6{,}4 \times 15{,}6$ mm. Eine Zerstreuung der Elektronen durch Gasreste kann keinesfalls dafür verantwortlich gemacht werden, da der Rand der geschwärzten Fläche, wie auch die vergrößerten Bilder zeigen, ausnahmslos vollkommen scharf ist. Noch auffallender ist die Tatsache, daß das Bild (siehe Fig. 10), das man erhält, wenn zwischen Blende I und den weiten kreisförmigen Blenden III und IV die kreisförmige Blende vom Durchmesser 4 mm in 1 cm Abstand von der Platte eingeschaltet ist, einen Durchmesser von 5,1 mm hat. Zu erwarten wäre der Durchmesser

$$4\,\frac{350}{340} = 4{,}12 \text{ mm}.$$

Auf dem kurzen Weg von 1 cm verbreitert sich das Elektronenbündel im Verhältnis 5,1 : 4,12, d. s. 24 Proz.

Auf allen Bildern, die mit den weiten Blenden III und IV hergestellt wurden, verläuft parallel zur äußeren Begrenzung innerhalb der geschwärzten Fläche ein Streifen tieferer Schwärzung. Ein Versuch diese Erscheinungen zu erklären, kann erst gemacht werden, wenn weitere quantitative Messungen vorliegen.

Aachen, Institut für theoretische Physik, Juni 1931.

(Eingegangen 1. Juli 1931.)

Über den Quereffekt der Magnetostriktion.

Von G. Dietsch und W. Fricke.

(Vorläufige Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut Jena.)

Mit den bisherigen physikalischen Meßmethoden zur Bestimmung kleiner Längenänderungen (optischer Hebel, Interferenzstreifen) wäre es nicht möglich gewesen, den schon von Joule[1]) vermuteten Quereffekt der Magnetostriktion, d. h. die Querschnittsänderung ferromagnetischer polykristalliner Materialien im Magnetfeld, vor allem bei kleinen Feldern, einwandfrei zu messen.

Nachdem das zuerst von Pungs und Preuner[2]) angegebene Überlagerungsverfahren in den letzten Jahren zu einer Meßmethode von sehr großer Empfindlichkeit (10^{-8} relativ) ausgebaut worden war[3]), bestehen auch für die quantitative Bestimmung des Quereffektes keine großen experimentellen Schwierigkeiten mehr, wie schon vor kurzer Zeit in dieser Zeitschrift erwähnt wurde[4]).

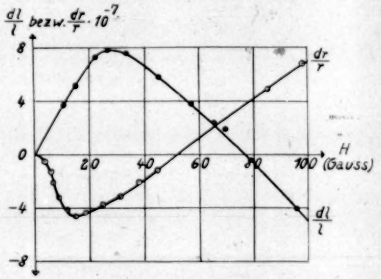
Für die Messung des Quereffektes mittels des Schwebungsverfahrens kommen zwei Methoden in Frage, die zum erstenmal im Technisch-Physikalischen Institut Jena angewandt wurden, und die in einer späteren Arbeit ausführlich behandelt werden sollen:

1. Der zu untersuchende Stab befindet sich zentrisch in einem Messingzylinder und bildet mit diesem einen Zylinderkondensator, welcher in der Magnetisierungsspule axial angeordnet ist. Die infolge des Quereffektes eintretende Abstandsänderung zwischen Staboberfläche und Messingmantel bewirkt eine meßbare Kapazitätsänderung.

Um eine möglichst große Empfindlichkeit zu erzielen, mußte der Abstand zwischen Stab und Zylinder sehr klein (0,1 mm) sein; es ist nun sehr schwierig, den Messingmantel so am Stab zu befestigen, daß durch den Längseffekt und die sog. Kipperscheinungen[5]) keine Veränderung der gegenseitigen Lage der Kondensatorteile eintritt. Außerdem muß jeder zu untersuchende Probestab vorher auf eine Länge von etwa 25 cm auf 0,001 mm genau geschliffen sein und kann daher infolge dieser mechanischen Vorbehandlung Änderungen seiner magnetischen Eigenschaften erfahren. Es gelingt schwer, mit dieser Methode einwandfreie Messungen zu erzielen.

2. Der Stab ist in einer horizontal gelagerten Magnetisierungsspule axial angeordnet und trägt ein Hebelsystem mit Klemmbacken, welches durch ein kleines Fenster in der Spule nach außen geführt ist und an dem ein Plattenkondensator befestigt wird, aus dessen Kapazitätsänderung sich ebenfalls der Quereffekt bestimmen läßt. Bei dieser Methode muß das Hebelsystem so auf dem Stab gelagert sein, daß es den infolge des Kippeffektes eintretenden Bewegungen des Stabes nach Einschalten des Feldes folgen kann, ohne das Resultat zu fälschen. Nach Ansicht der Verfasser mißglückten die Messungen von Rhoads[1]) wegen Nichtbeachtung dieser Fehlerquelle.

Es wurde zuerst der Verlauf des Quereffektes an einem von der Fa. Heraeus, Hanau, gelieferten



Quer- und Längseffekt der Magnetostriktion für Elektrolyteisen (geglüht).

vakuumgeschmolzenen Elektrolyteisenstab (Länge 500 mm; Durchmesser 10 mm; geglüht) untersucht, und zwar mittels der zuletzt erwähnten Methode. Die Empfindlichkeit betrug etwa 10^{-8} cm und läßt sich nach Beseitigung störender Temperatureinflüsse auf etwa 10^{-9} cm steigern. Zum Vergleich der Striktionserscheinungen in der Quer- und Längsrichtung des Stabes wurde auch der Längseffekt derselben Probe mit Hilfe des Überlagerungsverfahrens gemessen. Beide Kurven sind in einem Diagramm vereinigt und ließen sich gut reproduzieren. Wie Joule vermutete und wie sich indirekt aus dem Volumen- und Längseffekt ergibt[1]), zeigen die Striktionen in den fraglichen Richtungen einen umgekehrten Verlauf. Bemerkenswert dabei ist, daß die Maxima bei verschiedenen Feldstärken auftreten. Die Villaripunkte fallen nicht zusammen, wie es auch die Existenz des Volumeneffektes erfordert.

Die Messungen für die verschiedenen ferromagnetischen Materialien und deren Legierungen werden fortgesetzt, wobei hauptsächlich der Verlauf des Quereffektes bei kleinen Feldern untersucht werden soll, in derem Gebiet bisher eine Messung unmöglich war[2]).

1) W. Joule, Phil. Mag. **30**, 76, 1847.
2) L. Pungs und G. Preuner, Physik. Zeitschr. **20**, 551, 1919.
3) A. Schulze, Zeitschr. f. Techn. Phys. **8**, 495, 501, 1927. G. Dietsch, Zeitschr. f. Techn. Physik; August 1931.
4) A. Esau, Physik. Zeitschr. **32**, 483, 1931.
5) A. Schulze, Arch. f. Elektr. Techn. **18**, 627, 1927.

1) E. Rhoads, Phil. Mag. **6**, 463, 1907.
2) Z. Nishiyama, Rep. Sendai, 341, 1929.

(Eingegangen am 17. Juni 1931.)

Zur Theorie der Gleichrichterwirkung[1]).

Von Carl Wagner.

1. Grundvorstellungen.

Die Erfahrung lehrt, daß die Elektronenleitfähigkeit von Halbleitern, z. B. *NiO*, Cu_2O, *CuJ* durch geringe Überschüsse des elektronegativen Elementes der betreffenden Verbindung wesentlich erhöht wird[2]). Das führt zu folgendem qualitativen Bild, für dessen spezielle Ausgestaltung ich einen Vorschlag von Herrn Prof. W. Schottky benutze. Von *CuJ* werden z. B. überschüssige Jodatome aufgenommen und diese sollen sich mit einwertigen Kupferionen in folgender Weise umsetzen.

$$Cu^+ + J(z) \rightleftarrows Cu^{++} + J^-(z). \qquad (1)$$

Hierbei deutet das Symbol (z) an, daß die betreffenden Jodatome bzw. Jodionen überschüssig in das Gitter eingebaut sind, während die gebildeten zweiwertigen Kupferionen sich auf normalen Gitterplätzen befinden. Die Störungsstellen von Cu^{++}-Ionen und $J^-(z)$-Ionen sind hierbei als weit voneinander entfernt zu denken. Ein das ganze Gitter durchlaufender Ionentransport kann dann in der Weise vor sich gehen, daß ein Elektron von einem Cu^+-Ion auf ein benachbartes Cu^{++}-Ion übergeht, wodurch letzteres zum Cu^+ wird und das ursprüngliche Cu^+ als Cu^{++} erscheint. In symbolischer Darstellung:

$$Cu^+ + Cu^{++} \rightarrow Cu^{++} + Cu^+. \qquad (2)$$

Maßgebend für den Elektronentransport sind also diejenigen Stellen, an denen ein Elektron zu wenig vorhanden ist (sogenannte Defektleitung). Je größer der Jodüberschuß, desto größer wird die Konzentration der Cu^{++}-Ionen sein und damit auch die elektrische Leitfähigkeit im Sinne der symbolischen Gleichung (2). Eine eingehendere Verfolgung dieser Vorstellungen speziell am *CuJ* ist in Aussicht genommen.

Das Vorhandensein von Cu^{++}-Ionen im Kupferoxydul in geringer Konzentration ist experimentell zwar direkt nicht nachgewiesen, stellt jedoch keine allzu gewagte Annahme dar.

Mit Hilfe dieser Vorstellung ist nun eine Deutung des Kupfer-Kupferoxydul-Gleichrichters[1]) möglich. Dieser besteht aus einer Kupferplatte (Mutterkupfer), auf der durch Oxydation eine Kupferoxydulschicht aufgewachsen ist, gegen deren Außenseite eine Platte aus anderen Metall, etwa Blei oder Zink, aufgepreßt ist. Sitz der Gleichrichterwirkung ist im wesentlichen die Übergangsstelle Mutterkupfer/Kupferoxydul[2]). Der Elektronenübergang Kupferoxydul → Kupfer ist behindert.

Im Sinne der oben skizzierten Vorstellung über den Leitfähigkeitsmechanismus im Inneren des Kupferoxyduls können wir die Vorgänge an der Grenzfläche Kupfer/Kupferoxydul in folgender Weise beschreiben. Übertritt von Elektronen vom Kupferoxydul zum Kupfer erfolgt durch Elektronenabgabe von Cu^+-Ionen im Kupferoxydul. Für diesen Vorgang ist aber die Existenz eines Sättigungsstromes anzunehmen, da ja die Zahl der einfach geladenen Kupferionen praktisch gleich der Zahl der Gitterionen ist und kaum weitererhöht werden kann (Sperreffekt). Erst bei sehr starken Feldern (10^7 Volt/cm) ist mit einem erzwungenen Elektronenübergang in Richtung Kupferoxydul → Kupfer zu rechnen. In der umgekehrten Richtung ist die Zahl der Elektronenübergänge jedoch im wesentlichen proportional der Konzentration an zweiwertigen Kupferionen als Elektronenfängern zu setzen. Folglich kann die Zahl der pro Zeiteinheit übergehenden Elektronen weitgehend dadurch erhöht werden, daß die Zahl der Cu^{++}-Ionen in der Grenzfläche wächst. Als qualitatives Ergebnis in Übereinstimmung mit der Erfahrung folgt somit: Sperrrichtung: Übergang von Elektronen vom Kupferoxydul zum Kupfer; Durchlaßrichtung: Übergang von Elektronen vom Kupfer zum Kupferoxydul.

2. Ableitung der Gleichstromcharakteristik des Kupfer-Kupferoxydul-Gleichrichters.

Wir bezeichnen die Zahl der Elektronenübergänge Kupfer → Kupferoxydul vermindert um die Zahl der Übergänge in der umgekehrten Richtung mit $\mathfrak{N}$ (pro cm² und Sekunde), die Zahl der Cu^{++}-Ionen pro cm³ in der Nähe der

1) Vorgetragen auf der 13. Tagung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 31. Mai 1931 in Jena.

2) Vgl. z. B. K. Baedeker, Ann. d. Phys. (4) **29**, 566, 1908; M. Le Blanc u. H. Sachse, Ber. d. Sächs. Akademie d. Wissensch. Leipzig. Mathemat. Physik. Klasse **92**, 133, 153, 1930; O. v. Auwers, Naturw. **19**, 133, 1931; B. Gudden u. G. Mönch, Naturw. **19**, 361, 1931.

1) Erste Angaben von L. O. Grondahl, Phys. Rev. (2) **27**, 813, 1926; Science **64**, 306, 1926; L. O. Grondahl und P. H. Geiger, Journ. Amer. Electr. Eng. **46**, 215, 1927.

2) Vgl. besonders W. Schottky und W. Deutschmann, Physik. Zeitschr. **30**, 839, 1929; W. Schottky, R. Störmer und F. Waibel, Zeitschr. f. Hochfrequenztechnik **37**, 162, 1931.

Grenzfläche mit y_a[1]). Dann ist im Sinne der qualitativen Ausführungen des vorigen Abschnitts zu setzen:

$$\mathfrak{R} = k_1 \cdot y_a - k_2. \tag{3}$$

Hierin sind k_1 und k_2 zunächst Proportionalitätsfaktoren. Nach dem Innern der Kupferoxydul-Phase zu findet sich ein Abfall des Potentials φ sowie der Konzentration y der Cu^{++}-Ionen (Elektrische Doppelschicht). Für die durch 1 cm² Querschnitt im Abstande x von der Grenzfläche pro sec stationär wandernde Elektronenzahl innerhalb der Kupferoxydulphase ist zu setzen:

$$\mathfrak{R} = y B \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B k T \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{4}$$

Hierin trägt das erste Glied der rechten Seite der durch das Potentialgefälle bedingten Bewegung Rechnung. Es bedeutet B die „Beweglichkeit" der Elektronen, d. h. die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen in cm/sec bei Wanderung nach dem Schema (2) bei einer wirksamen Kraft von 1 dyn; ε ist die elektrische Elementarladung. Das zweite Glied in (4) stellt den Anteil der durch Konzentrationsgefälle bedingten Diffusion dar. Die Größe BkT ist nach der Einsteinschen Beziehung[2]) die Diffusionskonstante des (2) entsprechenden Platzwechselvorgangs ohne elektrisches Feld (k Boltzmannsche Konstante, T absolute Temperatur). Gleichung (4) ergibt die Lösung des Problems ohne weiteres, wenn $\mathfrak{R}$ gegen die Absolutwerte der einzelnen Glieder der rechten Seite zu vernachlässigen ist. Wir nehmen also an[3]):

$$|\mathfrak{R}| \ll y B \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|. \tag{5}$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{kT} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{6}$$

oder integriert:

$$y_a = y_i \, e^{\frac{\varepsilon (\varphi_i - \varphi_a)}{kT}} \tag{7}$$

Hierin bedeutet φ_a das Potential in der Grenzschicht, φ_i das Potential im Inneren der Kupferoxydulphase. Letzteres ist allerdings nicht völlig konstant, sondern infolge des Ohmschen Widerstandes langsam ansteigend oder abfallend. Der durch den gewöhnlichen Ohmschen Widerstand bedingte Spannungsabfall kann jedoch zunächst vernachlässigt werden, da die Schichtdicken relativ gering sind. Das Ergebnis von (7) können wir auch in der Form aussprechen: die Verteilung der zweiwertigen Kupferionen folgt praktisch dem statisch gültigen Boltzmannschen e-Satz und wird durch die Elektronenströmung nicht wesentlich beeinflußt.

Nach B. Gudden und G. Mönch (a. a. O.) beträgt die spezifische Leitfähigkeit bei Zimmertemperatur $2 \cdot 10^{-3}$ bis $2 \cdot 10^{-5}$ Ohm^{-1} · cm^{-1} (je nach dem Sauerstoffgehalt). Da in Berührung mit dem Mutterkupfer nur ein sehr geringer Sauerstoffgehalt anzunehmen ist, legen wir in Übereinstimmung mit den Ausführungen in Abschnitt 1 den niedrigsten Wert den weiteren Rechnungen zugrunde ($1/w = 18 \cdot 10^6$ abs. elektrostat. Einh.).

Einführung der in Abschnitt 3 abgeleiteten Gleichung (16) speziell für negative Spannungen $V \sim -1$ Volt in die rechte Seite von (4) ergibt für $x = 0$:

$$y_a B \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{y_a}{y_i} \cdot \frac{1}{\varepsilon w} \cdot \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} \sim \frac{y_a}{y_i} \cdot \frac{\varkappa}{\varepsilon w} \cdot \sqrt{\frac{kT}{\varepsilon} \cdot V} \sim 2 \cdot 10^{18} \cdot \frac{y_a}{y_i}. \tag{4'}$$

Hierin ist $\varkappa = 10^5$ gesetzt, wie in Abschn. 3 näher begründet ist. Solange also $y_a/y_i = 10^{-2}$, ist der Ausdruck (4') groß gegen $\mathfrak{R}$ und damit die Näherung (5) erfüllt. Bei größeren negativen Spannungen wird allerdings gemäß (7) diese Bedingung verletzt, was jedoch auf die Form der Stromspannungskurve praktisch ohne Einfluß ist, da sowieso Sättigungsstrom herrscht. Die hier auftretende Komplikation könnte höchstens bei Wechselstromversuchen zur Kapazitätsmessung eine Rolle spielen (vgl. Abschn. 3).

W. Schottky und W. Deutschmann (a. a. O. S. 846) haben bereits auf die Widerstandserhöhung von Kupferoxydul durch überschüssige Elektronen in der Sperrschicht hingewiesen. Nach der hier aufgestellten Theorie handelt es sich jedoch um einen Nebeneffekt, während der eigentliche Gleichrichtereffekt durch Annahme einer begrenzten Übergangsgeschwindigkeit der Elektronen zwischen Kupfer und Kupferoxydul gemäß Gleichung (3) gedeutet wird. Dieser Mechanismus steht mit dem Leitfähigkeitsmechanismus in engem Zusammenhang, wie schon Schottky und Deutschmann vermutet haben.

1) Die Flächendichtigkeit der Cu^{++}-Ionen an der Grenzfläche kann wegen eventueller spezifischer Adsorption nicht unmittelbar aus y_a berechnet werden, ist aber jedenfalls proportional zu y_a anzunehmen.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **17**, 549, 1905. Die Anwendbarkeit dieser Beziehung auf den vorliegenden Fall kann durch analoge Betrachtungen wie für den Zusammenhang zwischen Ionenbeweglichkeit und Diffusion in festen Salzen gerechtfertigt werden. Vgl. C. Wagner, Zeitschr. f. Phys. Chem. B, **11**, 139, 1930.

3) Diese Bedingung ist für nicht zu große Spannungen und Ströme sicher erfüllt. Die durch die Konstante k_2 gegebene Maximalzahl von Elektronen pro cm² und sec in Richtung Kupferoxydul → Kupfer ist auf Grund der Erfahrung zu etwa $6 \cdot 10^{14}$ (entsprechend 10^{-4} Amp./cm²) anzunehmen.

Das erste Glied der rechten Seite von (4) kann in folgender Weise berechnet werden. Im Inneren der Kupferoxydulphase ist auch bei Stromfluß wegen Elektroneutralität der ganzen Phase die Zahl der Cu^{++}-Ionen pro cm³ konstant gleich y_i, so daß in Gleichung (4) das zweite Glied der rechten Seite zu streichen ist und nach Multiplikation mit ε allein bleibt

$$\text{Stromdichte} = \mathfrak{R} \varepsilon = y_i B \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Daraus ergibt sich der spezifische Widerstand w:

$$w = \frac{\text{Feldstärke}}{\text{Stromdichte}} = \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot y_i \cdot B}.$$

In Verbindung mit (3) folgt weiter:

$$\mathfrak{R} = k_1 \cdot y_i \cdot e^{\frac{\varepsilon(\varphi_i - \varphi_a)}{kT}} - k_2. \qquad (8)$$

Die Potentialdifferenz $\varphi_i - \varphi_a$ als solche ist allerdings nicht meßbar, sondern nur die an der gesamten Kombination $Cu \mid Cu_2O \mid$ Metall liegende Spannung V. Wir wollen nun die Annahme einführen, daß der Spannungsabfall im Inneren des Kupferoxyduls (Ohmscher Widerstand) sowie die Spannungsdifferenz an der dem Kupferoxydul aufgepreßten Metallplatte zu vernachlässigen ist. Dann kann die äußere Spannung V als Differenz von $\varphi_i - \varphi_a$ und der entsprechenden Größe $\Delta\varphi_0$ ohne Stromfluß ($\mathfrak{R} = 0$) angesehen werden. Also gilt:

$$(\varphi_i - \varphi_a) = \Delta\varphi_0 + V. \qquad (9)$$

Die statisch vorhandene Potentialdifferenz $\Delta\varphi_0$ einer derartigen Doppelschicht ist bereits von G. Gouy[1]), D. L. Chapman[2]), K. F. Herzfeld[3]), O. Stern[4]) u. a. (speziell für wässerige Lösungen) diskutiert worden. Im vorliegenden Falle könnte etwa die spezifische Adsorption von zweiwertigen Kupferionen als Ursache für $\Delta\varphi_0$ angenommen werden.

Aus (8) und (9) folgt:

$$\mathfrak{R} = k_1 \cdot y_i \cdot C^{\frac{\varepsilon(V + \Delta\varphi_0)}{kT}} - k_2 \qquad (10)$$

oder wegen $\mathfrak{R} = 0$ für $V = 0$:

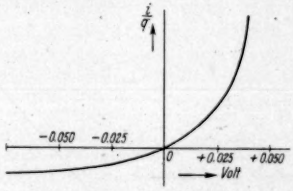
$$\mathfrak{R} = k_2 \cdot \left(e^{\frac{\varepsilon V}{kT}} - 1\right). \qquad (11)$$

Durch Multiplikation von (11) mit der Elementarladung ε erhalten wir für die Stromdichte i/q (Stromstärke pro cm²):

$$\frac{i}{q} = k_2\,\varepsilon \cdot \left(e^{\frac{\varepsilon V}{kT}} - 1\right). \qquad (12)$$

(Stromfluß in der Durchlaßrichtung positiv gerechnet.) Die durch (12) dargestellte Stromspannungscharakteristik zeigt die Figur in graphischer Darstellung. Da $\frac{kT}{\varepsilon}$ (wie in der Nernstschen Formel für Potentiale in Lösungen) 0,025 Volt entspricht, findet ein Aufbiegen bei etwa dieser Spannung statt [Einfluß des Exponentialgliedes in (12)].

Dieses Verhalten steht mit der Erfahrung qualitativ in Einklang. Die tatsächlich gefundene Charakteristik weicht qualitativ allerdings insofern von der Figur ab, als bei größeren negativen Spannungen der Absolutwert der Stromstärke über den Betrag des durch $k_2\varepsilon$ in (12) gegebenen Sättigungsstrom ansteigt. Die Ursache hierfür liegt, wie schon in Abschn. 1 erwähnt, darin, daß bei starken elektrischen Feldern ein erzwungener Übergang von Elektronen vom Kupferoxydul zum Metall einsetzt. Wahrscheinlich findet



Strom-Spannungs-Charakteristik eines Kupfer - Kupferoxydul - Gleichrichters nach Gleichung (12) (i/q Stromdichte).

der Stromfluß in der Sperrichtung nicht an allen Stellen der Grenzfläche Kupfer/Kupferoxydul gleichmäßig statt, sondern bevorzugt an Kristallkanten und ähnlichen Störungsstellen[1]), deren quantitative Erfassung auch bei anderen physikalischen Fragen bisher noch nicht gelungen ist.

Gleichung (12) erweist sich aber quantitativ auch für kleinere Spannungen $\left(\frac{\varepsilon V}{kT} \sim \pm 1\right)$ als mit der Erfahrung nicht übereinstimmend. Möglicherweise ist die Potentialdifferenz zwischen Kupferoxydul und aufgepreßter Gegenelektrode nicht zu vernachlässigen, wie bei Aufstellung von (9) angenommen wurde, da sich auch dort noch ein ganz analoger Gleichrichtermechanismus wie an der Grenzfläche zwischen Kupfer und aufgewachsenem Kupferoxydul befindet. Nur ist ein quantitativer Unterschied anzunehmen, etwa derart, daß an der Grenzfläche Kupferoxydul/angepreßtes Metall bei viel kleineren Spannungen ein erzwungener Elektronenübergang stattfindet, der einen praktisch unbehinderten Elektronenfluß in der Richtung Kupferoxydul → aufgepreßtes Metall zur Folge hat. Oder es ist für letztere Grenzfläche ein wesentlich größerer k_2-Wert anzunehmen. Die Kombination des technischen Kupfer/Kupferoxydul-Gleichrichters erscheint daher zu einer quantitativen Prüfung der Theorie nicht ohne weiteres geeignet.

3. Die Kapazität der Doppelschicht an der Kupfer-Kupferoxydul-Grenzfläche.

Zur näheren Untersuchung der elektrischen Doppelschicht an der Kupfer-Kupferoxydul-

1) Compt. rend. **149**, 654, 1909; Journ. de Phys. (4) 8, 457, 1910.
2) Phil. Mag. (6) **25**, 475, 1913.
3) Physik. Zeitschr. **21**, 28, 1920.
4) Zeitschr. f. Elektrochem. **30**, 508, 1924.

1) Über den Einfluß der physikalischen Vorbehandlung auf die Erscheinungen an der Grenzfläche Kupferoxydul/angepreßtes Metall vgl. W. Schottky, R. Störmer und F. Waibel, a. a. O.

Grenzfläche benutzen wir die Poissonsche Gleichung, wobei die räumliche Ladungsdichte mit ϱ sowie die Dielektrizitätskonstante mit D bezeichnet wird.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = -\frac{4\pi\varrho}{D} = -\frac{4\pi\varepsilon(y-y_i)}{D}. \quad (13)$$

Zur Berechnung der Feldstärke kombinieren wir (6) und (13):

$$\frac{\partial^2 \ln y}{\partial x^2} = \frac{4\pi\varepsilon^2(y-y_i)}{DkT}. \quad (14)$$

Integration ergibt:

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x} = \sqrt{\frac{8\pi\varepsilon^2}{DkT}} \cdot \sqrt{(y-y_i) - y_i \ln \frac{y}{y_i}}. \quad (15)$$

Mit (6), (7) und (9) gilt speziell für $x = 0$:

$$\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x=0} = \varkappa \cdot \frac{kT}{\varepsilon} \cdot \sqrt{e^{\frac{\varepsilon(V+\Delta q_0)}{kT}} - 1 - \frac{\varepsilon(V+\Delta q_0)}{kT}}. \quad (16)$$

Hierin hat die zur Abkürzung eingeführte Größe $\varkappa$:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{8\pi\varepsilon^2 y_i}{DkT}} \quad (17)$$

die Dimension einer reziproken Länge, die als mittleres Maß der Dicke der auftretenden Doppelschicht aufgefaßt werden kann [vgl. unten Gleichung (21)], analog wie die mit dem gleichen Symbol bezeichnete Größe der Debye-Hückelschen Elektrolyttheorie[1]).

Auf Grund von (13), (16) berechnen wir die Ladungsdichte η pro cm²:

$$\eta = \int_0^\infty \varrho\, dx = -\frac{D}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\, dx = \frac{D}{4\pi}\cdot\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x=0}. \quad (18)$$

Aus (16) und (13) berechnete sich die spezifische Kapazität c pro cm² Grenzfläche zu:

$$c = \frac{\partial \eta}{\partial V} = \frac{D\varkappa}{4\pi} \cdot \frac{\left|\left(e^{\frac{\varepsilon(V+\Delta q_0)}{kT}} - 1\right)\right|}{2\sqrt{e^{\frac{\varepsilon(V+\Delta q_0)}{kT}} - 1 - \frac{\varepsilon(V+\Delta q_0)}{kT}}}. \quad (19)$$

Die Bestimmung der Kapazität von Kupfer-Kupferoxydul-Aggregaten ist von W. Schottky und W. Deutschmann[2]) durch Messung des Wechselstromwiderstandes bei verschiedenen Frequenzen und bei verschiedenen Gleichstrombelastungen und relativ kleiner Wechselspannung (20 Millivolt) vorgenommen worden. Bei diesen Versuchen ergab sich, daß eine Kupfer-Kupferoxydul-Lamelle nicht einfach als Kondensator mit parallel geschaltetem Widerstand aufgefaßt werden kann, sondern kompliziertere Ersatzschaltbilder anzunehmen sind. Infolge der zu Ende von Abschnitt 2 erwähnten Komplikationen erscheint eine Diskussion im einzelnen verfrüht. Wir benutzen vielmehr lediglich eine Näherungsformel, indem wir größenordnungsmäßig

$$\frac{\varepsilon V}{kT} \sim 1; \quad \frac{\varepsilon \Delta q_0}{kT} \sim 1 \quad (20)$$

annehmen und aus (19) erhalten:

$$c \sim \frac{D\varkappa}{4\pi}. \quad (21)$$

Aus dem von W. Schottky und W. Deutschmann gefundenen Wert $c \cong 25000$ cm pro cm² Grenzfläche errechnet sich $\frac{1}{\varkappa} \sim 4 \cdot 10^{-5}$ cm. Diesem Wert entspricht ein $y_i \sim 5 \cdot 10^{13}$ (= Zahl der zweiwertigen Kupferionen pro cm³ im Innern des Kupferoxyduls). Bei einer Gesamtzahl von $5 \cdot 10^{22}$ einwertigen Kupferionen pro cm³ bedeutet dies, daß der Bruchteil der zweiwertigen Kupferionen etwa 10^{-9} beträgt. Die Größenordnung der so errechneten Gitterstörungen scheint plausibel.

4. Kupfer-Kupferoxydul-Lamellen als Photozellen.

Bei Belichtung der Sperrschicht einer Kupfer-Kupferoxydul-Lamelle fließen relativ erhebliche Ströme, die in den letzten Monaten Gegenstand mehrerer Arbeiten gewesen sind[1]). Im Sinne der in Abschnitt 1 entwickelten qualitativen Vorstellungen ist dieser Effekt in folgender Weise zu deuten. Absorption je eines Lichtquantes in der Grenzfläche bewirkt den Übergang je eines Elektrons von einem einfach geladenen Kupferion des Kupferoxyduls zur Kupferphase. Bezeichnen wir die Zahl der pro sec und cm² absorbierten und wirksamen Lichtquanten mit $\mathfrak{P}$, dann ist also an Stelle von (3) zu schreiben:

$$\mathfrak{N} = k_1 \cdot y_a - k_2 - \mathfrak{P}. \quad (22)$$

Von einer Diskussion dieser Gleichung möge abgesehen werden. Es sei nur hervorgehoben, daß in Übereinstimmung mit den Befunden von O. v. Auwers und H. Kerschbaum die Wirkung des Lichtes im Sinne einer „Ersatzstromquelle" aufgefaßt werden kann (Ergiebigkeit $\mathfrak{P}$ Elektronen pro sec und cm²).

1) P. Debye und E. Hückel, Physik. Zeitschr. **24**, 185, 1923.
2) a. a. O.

1) B. Lange, Physik. Zeitschr. **31**, 139, 964, 1930; W. Graffunder, Physik. Zeitschr. **31**, 375, 1930; W. Schottky, Physik. Zeitschr. **31**, 913, 1930; O. v. Auwers und H. Kerschbaum, Ann. d. Phys. (5), **7**, 129, 1930.

5. Zusammenfassung und Schlußbemerkungen.

Die Elektronenleitung in Cupro-Verbindungen und ihre Erhöhung durch Überschuß des chemisch-elektronegativen Elementes wird durch die Gegenwart von Cu^{++}-Ionen gedeutet, die als Elektronen-Defektstellen im normalen Cu^{+}-Gitter den Elektronentransport vermitteln.

Auf Grund dieser Vorstellung wird eine Theorie des Kupfer-Kupferoxydul-Gleichrichters gegeben, die ein befriedigendes qualitatives bzw. halbquantitatives Bild seiner wesentlichsten Eigenschaften liefert.

Die Anwendung auf andere Systeme mit festen Halbleitern (Detektoren und Gleichrichter) erscheint ungezwungen möglich. Im allgemeinen Falle sind nicht nur höherwertige Ionen des elektropositiven Elementes zu berücksichtigen, sondern auch Ionen geringerer Wertigkeit (neutrale Atome), ferner anomal geladene Ionen des elektronegativen Elementes des betreffenden Halbleiters sowie schließlich freie Elektronen.

Von besonderem Interesse erscheint die Möglichkeit, aus Kapazitätsmessungen genauere Aussagen über die Konzentrationen von Fehlordnungsstellen sowie über die Beweglichkeit der Elektronen in Halbleitern zu erhalten.

Jena, Physikalisch-Chemische-Abteilung des Chemischen Institutes der Universität.

(Eingegangen 6. Juli 1931.)

Bemerkung zur Arbeit von J. Zahradníček: „Zwei akustische Vorlesungsversuche". Physikalische Zeitschr. 32, 56—59, 1931.

(Aus dem Physikalischen Laboratorium der Militär-Medizinischen-Akademie Leningrad.)

Von W. Litvinoff.

Ich erlaube mir zu bemerken, daß eine von den Erscheinungen, nämlich die Schallinterferenz, auch mit etwas einfacheren Mitteln demonstriert werden kann.

Man befestigt ein gewöhnliches Quinckesches Rohrinterferometer in einem von allen Seiten durch Wolle oder Watte gut akustisch isolierten Holzkasten.

Zur Betätigung des Interferometers von außen dient eine lange, durch die Seitenwand des Kastens durchgeführte Führung.

Im Innern des Holzkastens ist ein Telephon an das Schalleinführungsrohr des Interferometers angebracht.

Das Ausgangsrohr des Interferometers ist durch die Seitenwand des Kastens nach außen durchgeführt und mit einem Holztrichter, der als Lautsprecher dient, versehen.

Das Telephon wird von einem kleinen Niederfrequenzröhrengenerator (0,5—1 w) gespeist, der, je nach Einstellung seiner Kapazität (Radio-Amateur-Drehkondensator) von 3000 bis 14 000 Schwingungen liefern kann.

Der Generator wird in üblicher Weise an das Wechselstrom-Beleuchtungsnetz durch einen entsprechenden Röhrengleichrichter angeschlossen. Die ganze Apparatur läßt sich bequem auf dem Vorlesungstisch aufstellen.

Wenn die akustische Isolation des Kastens befriedigend ist, so erhält man bei Betätigung des Interferometers durch die oben erwähnte Führung recht gute Maxima und Minima des Schalles, die auch einem großen Auditorium wahrnehmbar sind.

Sämtliche Wellenlängen lassen sich mittels einer geeigneten, an der Führung angebrachten Skala bequem berechnen.

Eine solche Anordnung wurde seit Herbst 1930 mehrmals in einem großen Auditorium demonstriert. Die Hörbarkeit war ganz befriedigend.

Dieselbe Apparatur kann auch zu Vorlesungen über die Theorie der elektrischen Schwingungen dienen. Man darf aber nicht vergessen, daß die Thomsonsche Formel bei einem Niederfrequenzgenerator in Rücksicht auf die Selbstkapazitäten des Apparates nicht ganz einfach anzuwenden ist. Nur bei recht groben Vorlesungsberechnungen darf man das außer acht lassen.

Leningrad, 24. März 1931.

(Eingegangen 2. April 1931.)

Bemerkung zu meiner Arbeit „Das Ausdehnungs-Hydrometer[1])".

Von E. Hiedemann.

Nach Erscheinen der oben genannten Arbeit hatte Herr L. M. Chatterjee (Patna, Indien) die Freundlichkeit, mich darauf aufmerksam zu machen, daß die von mir angegebene Methode bereits in einem Buche von T. G. Bedford, "Practical Physics", angeführt wurde. Da diese Methode in keiner Zeitschrift publiziert ist, sondern sich nur in diesem Buche befindet, das ich nicht kannte, habe ich es übersehen, daß diese Methode bereits bekannt war.

1) Diese Zeitschr. **32**, 223, 1931.

(Eingegangen 21. Juli 1931.)

BESPRECHUNGEN.

W. Wien und F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik. Bd. 10: G. Hoffmann, Elektrostatik, und W. O. Schumann, Hochspannungstechnik. 8°. X u. 576 S., mit 252 Fig. i. T. Leipzig 1930. Akad. Verlagsgesellschaft RM 53.—, geb. RM 55.—.

Der erste Teil des Werkes behandelt umfassend die Elektrostatik. Nach einer einleitenden und historischen Übersicht werden die Grundgleichungen der Elektrostatik im Gaußschen und legalen Maßsystem angegeben, ihre Anwendung auf Leitersysteme, auf den Energieumsatz bei Lageänderungen und auf Feldberechnungen bei zwei- und dreidimensionalen Systemen wird gezeigt. Angaben über die experimentelle Untersuchung elektrischer Felder leiten hinüber zu den elektrostatischen Apparaten und Meßmethoden. Die Elektrometer werden eingehend behandelt (ein interessanter Abschnitt für den Ingenieur, dessen Meßtechnik diese Geräte fast nicht mehr kennt!). Kürzer werden die Elektrisiermaschinen, die ja auch für physikalische Zwecke vielfach durch mehr technische Hochspannungserzeuger verdrängt worden sind, behandelt; die Kondensatoren schließen sich an. Sehr wertvolle Hinweise für die Praxis des Messens enthält das Kapitel über Meßmethoden.

Bilden diese Teile, soweit sie sich auf die Maxwell-Hertzschen Grundgleichungen stützen können, wie der Verfasser eingangs sagt, im wesentlichen ein geschlossenes, gefestigtes Wissensgebiet, so führen die beiden letzten Abschnitte, das Verhalten der Stoffe im elektrostatischen Feld und die Elektrizitätserregung behandelnd, auf zahlreiche Probleme einerseits der modernen Atomphysik, andererseits der Technik.

Der zweite Teil des Bandes behandelt die Hochspannungstechnik, dem Rahmen des Gesamtwerkes entsprechend nicht im Sinne einer Großkraftübertragungstechnik, sondern unter Voranstellung der Probleme, die mit hohen Spannungen an sich verknüpft sind.

Der Benutzer des Werkes wird dankbar sein, daß die Erzeugung hoher Spannungen aller Art eingehend dargestellt wird. Der Transformator als wichtigster Erzeuger wird grundsätzlich behandelt, die verschiedenen Ausführungsformen, die die Schwierigkeit der Beherrschung höchster Spannungen gezeitigt hat, werden beschrieben; die Methoden zur Erzeugung gedämpft-hochfrequenter Spannungen und die Gleichrichtungsverfahren schließen sich an. Auch die modernen Stoßspannungen sind nicht übersehen. Eine kleine Bemerkung sei hier gemacht: die Angabe auf Seite 364 unten, daß Widerstände, zur Regulierung der Spannung zwischen Netz und Transformator geschaltet, keine ungünstige Veränderung der Spannungskurve zur Folge haben, trifft in dieser allgemeinen Form nicht zu. Widerstände können zwar die Spannungskurve u. U. sogar verbessern; in vielen Fällen aber verderben sie sie gründlich. Besondere Eigenschaften des Transformators und die Betriebsbedingungen sind hier von sehr großem Einfluß.

Von ebenso großem Werte dürfte die eingehende Behandlung der praktisch immer schwierigen Hochspannungsmessungen im II. Kapitel sein. In Verbindung mit den äußerst reichhaltigen Literaturangaben möchte man sie als erschöpfend bezeichnen. Ein besonderes Kapitel ist der heute so außerordentlich wichtigen Messung der dielektrischen Verluste gewidmet; jeder, der derartige Messungen durchzuführen hat, wird die umfassende Erörterung dankbar begrüßen.

Das V. Kapitel befaßt sich mit der Isolation, besonders den Oberflächenentladungen, die der Technik ganz besondere Schwierigkeiten bereiten bei hohen Betriebsspannungen. Das sehr schwierige, quantitativ noch durchaus nicht geklärte Gebiet ist klar behandelt.

An das folgende Kapitel „Schalter und Schalten" schließt sich die Erörterung der Glimmerscheinungen an Drähten, der Corona, die neuerdings technisch bedeutsam geworden ist, an. Den Abschluß des Werkes bildet eine eingehende ganz außerordentlich wertvolle Behandlung des Durchschlags der festen und flüssigen Körper. Sie wird jedem Benutzer bald unentbehrlich werden.

Die große Bedeutung der Hochspannungstechnik hat dazu geführt, daß in sehr schneller Reihenfolge zahlreiche Arbeiten erscheinen; die nach Beendigung der Niederschrift veröffentlichten hat der Verfasser dankenswerterweise in einem Anhang zusammengestellt.

Daß das vorliegende Werk jedem Physiker unentbehrlich sein wird, bedarf kaum der Erwähnung — darüber hinaus aber sei der Wunsch nach weitester Verbreitung in den interessierten Kreisen ausgesprochen. Es wird nicht nur rein praktisch dem experimentierenden Physiker und Techniker eine außerordentlich wertvolle Hilfe sein — es wird den Ingenieur zu einer vertieften Erfassung der Vorgänge anregen, die ihm oft im täglichen Umgange vertraut geworden sind und daher vielleicht zu Unrecht einfach erscheinen.

Gmelins Handbuch der Anorganischen Chemie. Systemnummer 59: Eisen. Teil A (Das Element Eisen), Lieferung 3. Hrsg. v. d. Dtsch. Chem. Ges. R. J. Meyer und Erich Pietsch. Gr.-8°. X. u. 273 S., mit 27 Fig. 8. Aufl. Berlin 1930. Verlag Chemie G. m. b. H. Preis RM 40.—, Subskr. RM 32.—.

Der vorliegende Teil des „Eisens" beansprucht ganz besonderes Interesse, einmal an sich durch seinen vorwiegend die Technologie dieses wichtigsten Elements enthaltenden Inhalt, dann aber wegen der besonderen Probleme, die dessen Darstellung einem derartigen Handbuch stellt und die an dieser Stelle schon früher gelegentlich hervorgehoben wurden. Es darf ja weder die Vollständigkeit leiden, noch der chemische Rahmen wesentlich überschritten werden. Das Prinzip des Gmelin, auch dem Techniker das Material so weitgehend zu bieten, daß er es verwerten kann, dabei aber die rein chemische Seite zu betonen, hat wohl in diesem Teil seine Feuerprobe zu bestehen — und hat sie bestanden.

Die Gesichtspunkte bei der Anlage des Teiles (von den Herausgebern in einer besonderen Vorbemerkung zusammengefaßt) sind naturgemäß bei den verschiedenen Abschnitten verschieden. Zunächst war es bei den Abschnitten „Passivität des reinen und technischen Eisens" (E. Liebreich) und „Chemisches Verhalten und Korrosion" (M. Rudolph, A. Eisner, A. Kotowsky) von vornherein

geboten, aus dem ungeheuren Wust der Originalliteratur, insbesondere den technischen Spezialerfahrungen, die Zusammenhänge herauszuschälen. Da diese gerade auf diesen Gebieten noch keineswegs klar liegen, ist es zu begrüßen, daß gerade Befunde, die für theoretische und reaktionskinetische Zusammenhänge bedeutungsvoll erscheinen, vorwiegend berücksichtigt und objektiv und sorgfältig, doch unter Wahrung von Leitlinien, angeführt sind. Es ist zu erwarten, daß die künftige Erforschung der Oberflächenvorgänge am Eisen in diesem Abschnitt eine ganz wesentliche Erleichterung und Grundlage finden wird.

Ganz andere Wege mußten für die Bearbeitung der „Gewinnung des technischen Eisens" (R. Durrer mit H. Lueb und M. W. Neufeld) begangen werden. Hier treffen die Herausgeber die Schwierigkeit an, ohne die Leitung durch ein modernes Handbuch der Eisenhüttenkunde aus einer gewaltig ausgedehnten Originalliteratur das chemisch und technologische Wichtige herauszuheben. Eine halb historische Darstellung, in der die geschichtliche Entwicklung in den gegenwärtigen Stand einmündet und deren Schluß die neueren Arbeiten und Spezialverfahren bilden, löst hier das Problem. Diese Art der Literaturbearbeitung stellt eine ganz neue Form der handbuchmäßigen Darstellung vor, die über das, was die Herausgeber versprechen, sogar hinausgeht. Der Abstand von dieser Darstellung zu einem geschlossenen Handbuch der chemischen Eisenhüttenkunde ist wirklich nicht groß. Übersichtliche Anordnung, schöne Diagramme und anschauliche Kurvenbilder geben die Möglichkeit einer gründlichen Einarbeitung in die chemische und physikalisch-chemische Technologie der Vorgänge. Dabei ist doch eine auf vielen Gebieten ganz erstmalige Vollständigkeit des bearbeiteten Materials erreicht worden.

Den Schluß bilden die „direkten Verfahren zur Gewinnung des schmiedbaren Eisens" (A. Witscher, F. Henfling, K. Geissler, R. Johow, R. Wasmuth), während seine Gewinnung aus Roheisen später abgehandelt wird. Nach einer eingehenden Bearbeitung der Literatur, die sich von den alten Rennfeuern bis in die Gegenwart erstreckt, folgt hier eine dem System nach wiederum neue und zweckmäßige Darstellung der neusten Errungenschaften, nämlich eine große und vollständige Patenttabelle, die neben jedem Patent seinen kennzeichnenden Inhalt in kurzen Worten wiedergibt.

Nach Ansicht des Referenten hat in dieser Lieferung die Kompromißaufgabe, die dem Gmelin auf solchen Grenzgebieten erwächst, eine Lösung gefunden, die die Nachteile aller Kompromisse in einer ausgezeichnet durchdachten Synthese überkompensiert. Es sei neben den genannten Bearbeitern insbesondere noch der gewaltigen sachlichen und organisatorischen Arbeit der Herausgeber R. J. Meyer und E. Pietsch gedacht, die in dem Werk steckt. Chemikern wie Technikern dürfte eine höchst wertvolle und neue Arbeitsbasis gegeben worden sein.

G.-M. Schwab.

Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften. Bd. Nr. 228. W. Wien: Das Wiensche Verschiebungsgesetz, und W. Wien und O. Lummer: Die Verwirklichung des schwarzen Körpers. Akad. Verlagsgesellschaft m. b. H. Leipzig 1929. RM 3.80.

Der Band ist herausgegeben von M. v. Laue. Drei Arbeiten aus den Jahren 1893, 1894 und 1895 sind hier als die Pionierarbeiten über die spektrale Verteilung der Energie und ihre Veränderlichkeit mit der Temperatur zusammengestellt. Den beiden grundlegenden theoretischen Arbeiten Wiens auf diesem Gebiet ist auch die experimentell so überraschende Realisierung des absolut schwarzen Körpers durch W. Wien und O. Lummer beigefügt.

An den Originalarbeiten ist absichtlich nichts geändert und nichts weggelassen. Der Herausgeber schlägt in Anmerkungen die Brücken zum heutigen Stand unseres Wissens.

E. H. L. Meyer.

J. Cabannes, Anisotropie des molecules; Effet Raman. Conférences d'actualités scientifiques et industrielles. XI. Paris 1930. Les Presses Universitaires de France. Preis fr. 8.—.

Das Heft enthält 2 kurze, sehr klare Sammelreferate. Das erste behandelt die optische Anisotropie der Moleküle. Der Depolarisationsgrad des Tyndalllichts und der Kerreffekt sind hier besprochen in ihrer Bedeutung für das Molekülmodell von „Langevin", d. h. für das das Molekül ersetzende Deformations-Ellipsoid. Eine solche Zusammenstellung des Wesentlichen ist sonst kaum vorhanden.

Über den Ramaneffekt gibt es heute verschiedene zusammenfassende Darstellungen. Der bekannte Artikel von Pringsheim (Naturw. 1928) und im Handbuch der Physik, dann die Darstellung von Schäfer und Matossi (Fortschr. Chem.; Phys.; Phys. Chem. Bd. 20, Heft 6), endlich die Literaturnachweise im Ind. Journ. of. Physics Bd. 4 und 5 seien hier genannt. Der Artikel von Cabannes ist eine weitere klare Zusammenstellung, die aber über die erwähnten Arbeiten inhaltlich nur wenig hinausgeht.

In den Artikeln fehlen die Literaturnachweise fast vollkommen.

E. H. L. Meyer.

W. Volkmann, Die elektrische Schulausrüstung. Mitteilungen der preuß. Hauptstelle f. d. naturwissenschaftl. Unterricht. Heft 12. 95 S. Leipzig 1930. Verlag Quelle & Meyer. Geh. RM 4.80.

Auf den ersten 62 Seiten teilt der Verfasser — für den Schulpraktiker zuweilen etwas zu ausführlich — Erfahrungen und Ratschläge für die elektrische Ausrüstung von Schullaboratorien unter besonderer Berücksichtigung des modernen Übungsbetriebes mit. Da in vielen Großstädten die Elektrizitätswerke die Stromlieferung immer mehr von Gleich- auf Wechselstrom umstellen, werden die Schulen dadurch gezwungen, ihrerseits Umformer zur Gleichstromerzeugung aufzustellen. Die Sammlungsverwalter seien hier — wie aber auch im allgemeinen — auf Volkmanns beachtenswerte Vorschläge hingewiesen. Allerdings möchte Referent raten, bei Anschaffung eines Umformers die Mehrkosten nicht zu scheuen und die Spannung generatorseitig zu 220 Volt zu wählen, da eine ganze Reihe von wichtigen und lehrreichen Versuchen mit der vom Verf. vorgeschlagenen Spannung von 110 Volt wohl nicht durchführbar ist. Der Anhang enthält wertvolle Hinweise für die Anschaffung von Lichtbildgerät unter besonderer Berücksichtigung der Niederspannungsglühlampe.

Wolf.

G. Kowalewski, Integralgleichungen. (= Bd. 18 der Sammlung: Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik). Gr.-8°. 302 S., mit 11 Figuren. Berlin und Leipzig 1930. W. de Gruyter & Co. RM 15.—, geb. RM 16.50.

Das vorliegende Werk gibt eine ausführliche Darstellung der Theorie der linearen Integralgleichungen, deren Bedeutung für die mathematische Physik bekannt ist. Zur Einführung werden verschiedene spezielle Probleme besprochen, welche auf Integralgleichungen führen (Umkehrung von Integralen, Cauchysches und Lagrangesches Integrationsproblem bei linearen Differentialgleichungen). Sodann folgen: Volterasche Integralgleichungen (1. Kapitel), Fredholmsche Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern (2. Kapitel), Schmidtsche Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen mit symmetrischem Kern (3. Kapitel), Anwendung auf das Problem der transversalen Saitenschwingung und auf die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie in der Ebene (4. Kapitel).

Das (für Studierende bestimmte) Buch ist sehr klar geschrieben. Durchweg werden die allgemeinen Erörterungen an speziellen Beispielen verdeutlicht und überprüft. Alles in allem: Eine ausgezeichnete Neuerscheinung. — Für eine Neuauflage möchte Referent zur Diskussion stellen, ob es im Interesse des Anfängers nicht zweckmäßig wäre, innerhalb der einzelnen Paragraphen Gedankengang und Ergebnisse durch den Druck mehr hervorzuheben.

Haupt.

Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden. Hrsg. von E. Abderhalden. Abt. III, Teil A, Heft 10 (Lief. 342). Berlin u. Wien 1930. Urban & Schwarzenberg. RM 17.—.

Das Heft enthält vier einzelne Aufsätze: Potentiometrische Mikrotitration, von G. Rienäcker, Pufferung und Puffersysteme, von F. Leuthardt, Registrierung der Wasserstoffionenkonzentration im strömenden Blut, von R. Brinkman, und Bestimmung von Gas- und Dampfdrucken, von H. Fischer und O. Rebmann. Die drei ersten dürften den Lesern dieser Zeitschrift nur wenig wichtig sein; es sei deshalb nur allgemein bemerkt, daß sie alle gut und zweckentsprechend abgefaßt sind und daß besonders der zweite, über das spezielle Thema der Elektrolytpufferlösungen hinausgehend, eine recht klare und gut überlegte Darstellung desjenigen Teiles der klassischen wie der modernen Elektrolytlehre enthält, welcher hier in Betracht kommt.

Auch der für Physiker wohl interessantere letzte Aufsatz, welcher rein experimentellen Inhalt hat, zeugt von guter Sachkenntnis der Verfasser, wenn er auch im Vergleich zu anderen Darstellungen des Themas nichts Neues bringt. Besprochen werden die verschiedenen Manometerprinzipien und spezielle Ausführungsformen der auf diesen beruhenden Apparate, ferner Strömungsmanometer und Messung von Dampfdrucken. Die Hochvacuummanometer werden, mit Ausnahme des ausführlicher behandelten McLeod-Instrumentes, nur kurz erwähnt. Wie es die Sache verlangt, werden viele Abbildungen beigefügt. Die meisten davon sind mit Quellenangabe versehen; vergessen ist diese bei allen denjenigen Figuren, welche — mit mehr oder weniger geringfügigen Änderungen und großenteils unter weitgehender Benutzung auch des Textes — aus Ostwald-Luther, Hand- und Hilfsbuch, entnommen sind.

C. Drucker.

Gmelins Handbuch der Anorganischen Chemie, Systemnummer 59: Eisen, Teil B (Eisenverbindungen), Lieferung 3. Hrsg. v. d. Dtsch. Chem. Ges. R. J. Meyer und Erich Pietsch. Gr.-8°. XX und 143 S. 8. Auflage. Berlin 1930. Verlag Chemie G. m. b. H. Preis RM 24.—, Subskr. RM 19.—.

Wieder ist eine Lieferung des jetzt in raschem Tempo erscheinenden Eisenwerkes des Gmelin erschienen. Sie enthält in direkter Fortsetzung der früher besprochenen Lieferungen weitere Verbindungen des Eisens mit Kohlenstoff, und zwar im wesentlichen die Eisensalze organischer Säuren, sowie, was besonderes Interesse beansprucht, die komplexen Eisencyanverbindungen. Es ist unnötig, wiederum die Vorzüge des schon bewährten Darstellungssystems anzugeben. Angenehm empfindet man wieder vielfach die tabellarische Zusammenstellung der mannigfaltigen dargestellten Körper einzelner Klassen.

G.-M. Schwab.

K. Doehlemann, Geometrische Transformationen. Zweite umgearbeitete Auflage. Hrsg. von W. Olbrich. (= Bd. 15 der Sammlung: Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik). Gr.-8°. 254 S., mit 89 Figuren und 4 Abbildungen. Berlin und Leipzig 1930. W. de Gruyter & Co. RM 13.—, geb. RM 14,50.

Die vorliegende zweite Auflage behandelt im wesentlichen nur projektive Koordinaten und Transformationen, Abbildung durch reziproke Radien und Kreisverwandtschaften. Die Beziehungen zu den Anwendungen (z. B. projektive Abbildungen in Kinematik, Optik, Kristallographie; Methode der elektrischen Bilder) werden besprochen, was für den Physiker von einem gewissen Interesse ist. Inwieweit das Buch einem Bedürfnis entgegenkommt, muß der Erfolg lehren.

Haupt.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Frank Löbell zum ord. Professor der darstellenden Geometrie ebenda, der Observator an der Sternwarte Hamburg und Privatdozent für Astronomie an der Universität daselbst Dr. Walter Baade als ständiger Astronom am Mount Wilson Observatorium der Sternwarte in Pasadena, die Privatdozenten an der Universität Hamburg Dr. Walther Baade (Astronomie) und Dr. Rudolf Minkowski (Physik) zu a. o. Professoren ebenda.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Berlin und ehemalige Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Berlin Wirklicher Geheimer Oberregierungsrat Dr. Emil Warburg.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. P. Debye in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.